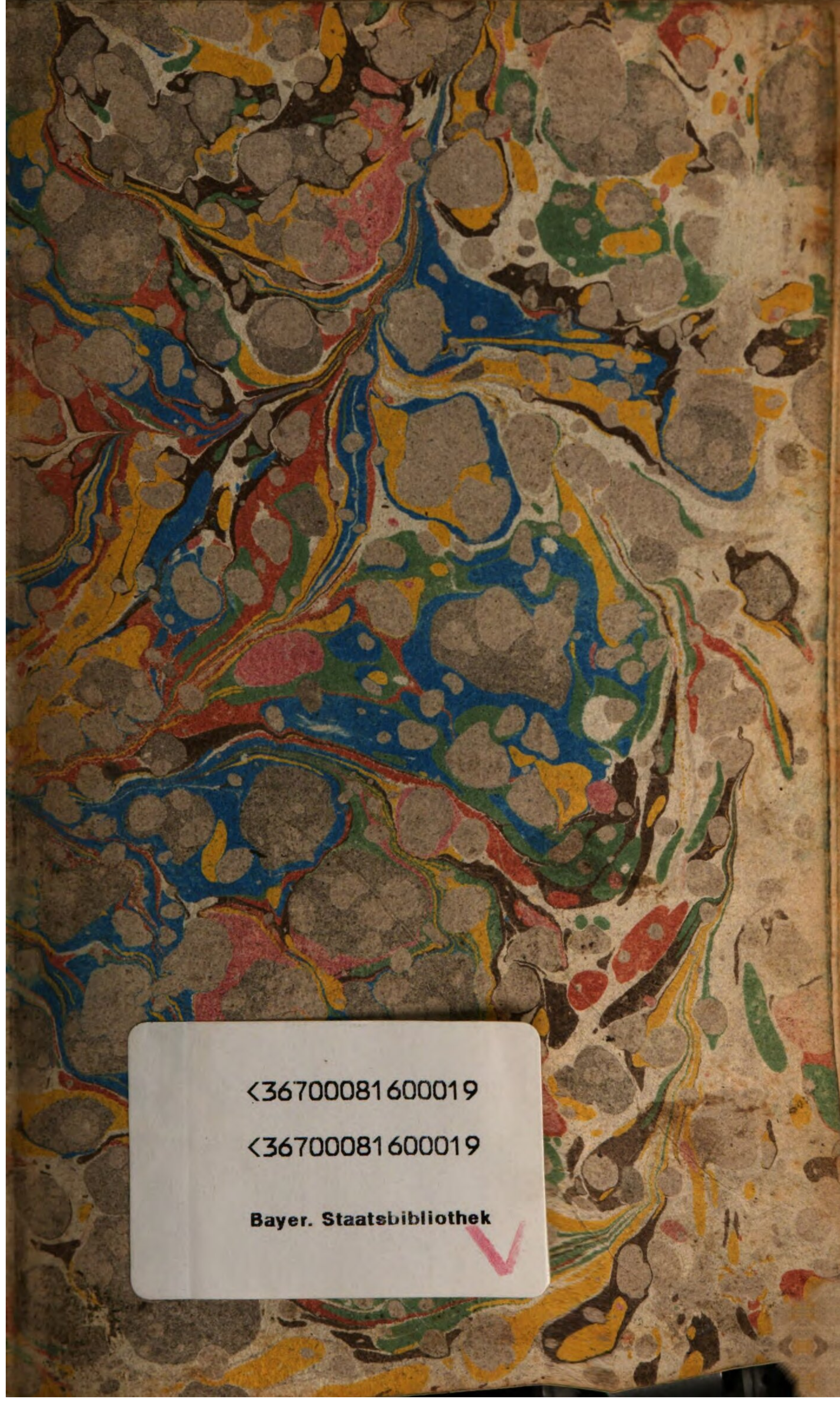




BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS.

Ch. Wink. del.

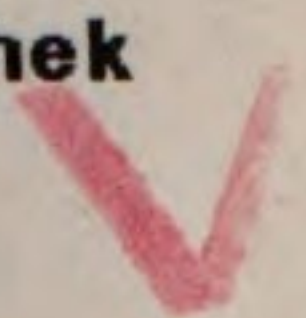
Söckler sc. 1779.

The background is a piece of marbled paper with a complex, organic pattern. It features large, irregular, light-brown or tan-colored spots that resemble stone or organic growth. These are interspersed with thin, flowing veins of various colors, including deep blue, bright yellow, vibrant red, and forest green. The overall effect is a rich, textured, and colorful pattern. In the lower-left quadrant, there is a white rectangular label with rounded corners. It contains three lines of black text and a small pink mark at the bottom right.

<36700081600019

<36700081600019

Bayer. Staatsbibliothek

A small, hand-drawn pink checkmark is located at the bottom right of the white label.

Phil. 2729. b.

Math. a. 237-2



Math. a. 237-2

R

Einleitung

zur

Berechnung der Leibrenten

und

Anwartschaften

Zweyter Theil.

Verfuche

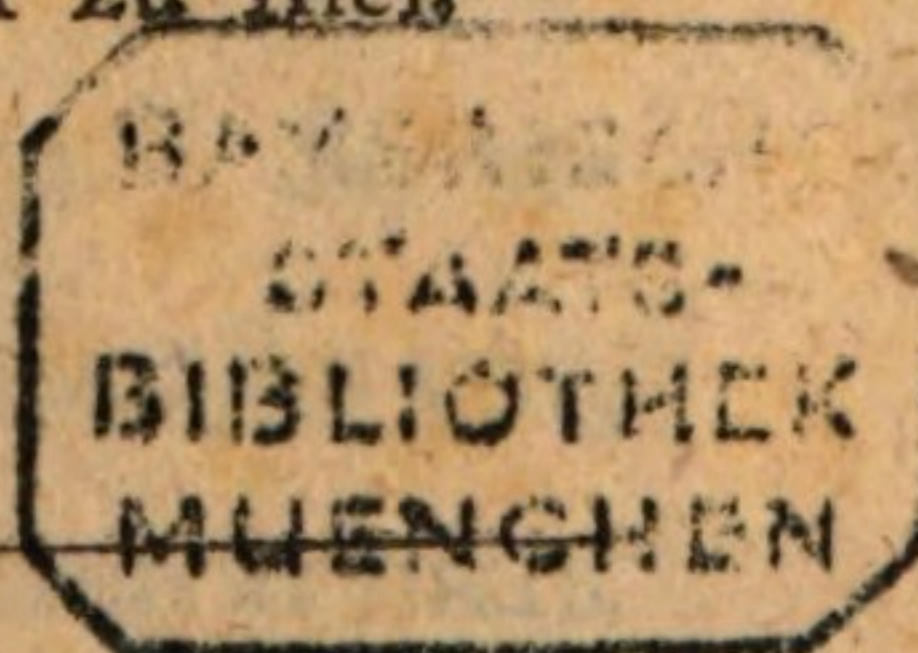
über einige bey Versorgung-Anstalten

erhebliche Punkte

von

Joh. Nicol. Tetens

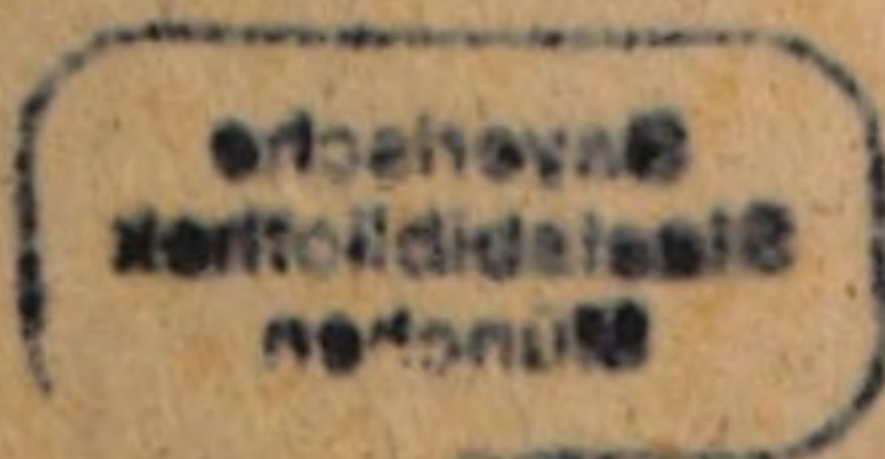
Professor der Philosophie und Mathematik zu Kiel.



Leipzig

bey Weidmanns Erben und Reich.

1786.



Einführung

1801

Berechnung der Leisten

1801

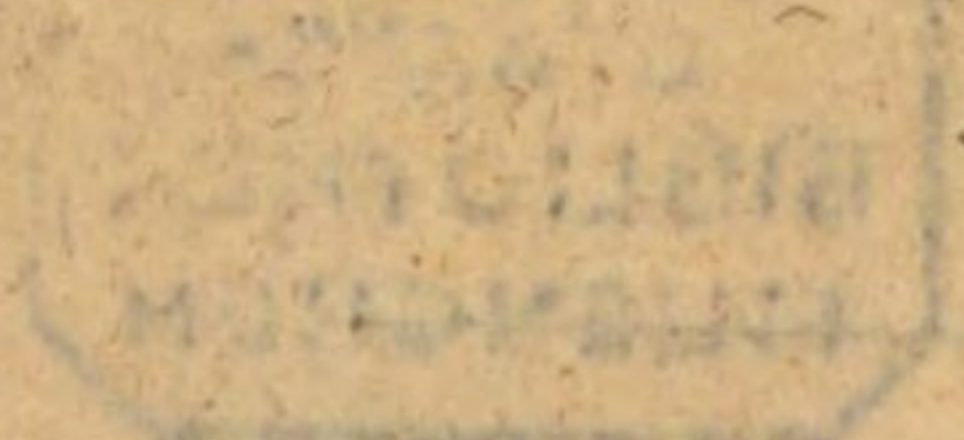
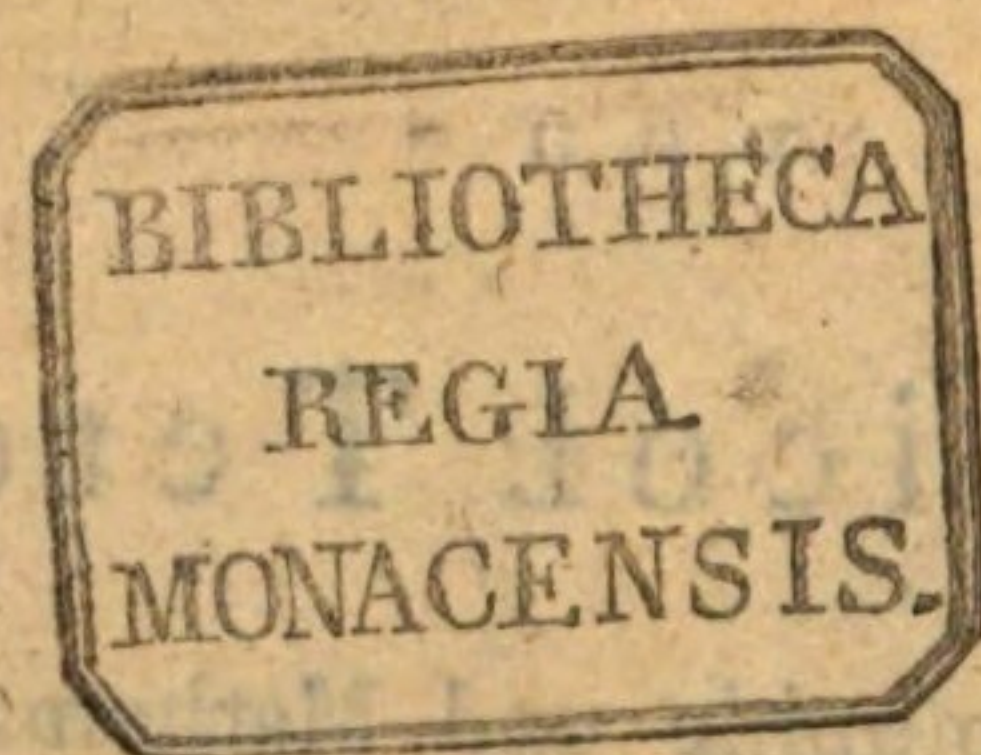
Anwartschaften

Zweiter Theil

Verfasser

über einige bey Verordnungen-Verfahren

erhebliche Punkte



Delphig

von Weidmann, Leben und Reich

1801



V o r b e r i c h t.

Die Einleitung zur Rentenrechnung enthält die Methoden, wornach bey Versorgungsanstalten gerechnet werden muß, wenn man diese so zuverlässig machen will, als es ihrer Natur nach angeht. Sogar in solchen Fällen, wo die Last unter die Interessenten nach einem andern Grundsatz vertheilet werden soll, als nach dem bey freyen Gesellschaften, daß jeder seine eigene trage, hat man doch vorher die wahren Rentenwerthe nach den nämlichen Methoden zu berechnen. Diefs zeigt, was die Casse haben müsse, und dann kann erst die Vertheilung auf die beliebte Art gemacht werden. So etwas kommt z. B. bey collegialischen Wittwencassen vor, wo auf das Alter der Personen bey dem Eintritt nicht gesehen, und Einfätze und Beyträge nach dem Verhältniß der Befoldungen bestimmt werden sollen.

Dennoch ist die Berechnung der Renten nicht alles, was ein durchgedachter Plan erfordert. Es kommt noch verschiedenes mehr dabey in Betracht, vor allem *das Risiko der Casse*, was bey solchen Instituten in jedem Fall Statt findet. Das alles zusammen genommen, worauf, zumal bey allgemeinen Versorgungsanstalten, zu sehen ist, würde Stoff geben zu einem eignen zweyten Theil der *Wissenschaft von Versorgungsanstalten*, wozu die Rentenrechnung nur den ersten ausmacht. Dergleichen hier zu liefern ist meine Absicht nicht. Ich habe bloß einige dahin gehörige Punkte zu erörtern gesucht, die mir die erheblichsten und schwierigsten schienen, und bisher wenig, die meisten, so viel ich weiß, gar nicht, untersucht sind.



Abhandlungen.

- 1) *Von der Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften* Seite 1
- 2) *Vom Verhältniß der Wittwenzahl zu der Zahl der stehenden Ehen* 94
- 3) *Ueber das Risiko der Casse bey Versorgungsanstalten* 109
- 4) *Ueber die Zuverlässigkeit der gefundenen mittlern Grössen* 173
- 5) *Ueber die Aufgabe: Wie der Ueberschuss oder Mangel bey einer Wittwencasse den Interessenten zu berechnen sey?* 186
- 6) *Von*

6) *Von Wittwenrenten, die von gewissen Bedingungen
abhängen* Seite 249

*Zusatz zur dritten und vierten Abhandlung. Von
der Wahrscheinlichkeit der grössten Erwartung*

Seite 286

1

Erste Abhandlung.

Von der Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften.

Erster Abschnitt.

Erfahrungen, die hieher gehören.

I.

Unter den Erfahrungen, woraus sich die Abweichung der Sterblichkeit in *ausgesuchten* Gesellschaften von der *tabellarischen*, oder der im gemeinen Leben, erkennen läßt, setze ich die aus der 1767 errichteten *Calenbergischen Wittwenverpflegungs - Gesellschaft* voran. Die mir gütigst mitgetheilten ausführlichen Tabellen mußten des Raums wegen etwas zusammengezogen werden. Das ist geschehen, ohne sie zu verstümmeln, und ohne sie weniger brauchbar zu machen für den, der sie etwan aus einem andern Gesichtspunct betrachten wollte.

2.

Vorläufig ist zu bemerken:

1) Die Calenbergische Gesellschaft war in Hinsicht der *Ehemänner* eine *ausgesuchte Gesellschaft*. Diese mußten ihre Gesundheit bey dem Eintritt bescheinigen.

A

Jedoch

Jedoch weifs man recht gut, daß viele solcher Zeugnisse, zumal in dem ersten Receptions-Termin, unzuverlässig gewesen sind. Alles drang sich mit Gewalt zu wegen der grossen Vorthelle, die man hoffen liefs. Daher auch die Sterblichkeit der Anfangs aufgenommenen 1270 Ehemänner nicht so viel geringer gewesen ist, als sie sonst hätte seyn können. Und nur von dieser ihrem Absterben habe ich das Verzeichniss vor mir, das noch dazu mangelhaft ist, wie ich nachher bemerken will. Aber auch so wie es ist, hätte ich gewünscht es von den in den folgenden Terminen Eingetretenen auch zu haben.

Die *Ehefrauen* brauchten ihre Gesundheit nicht zu bescheinigen. Es sind auch viele einzelne Beyspiele bekannt, wo Männer einsetzten, ohnerachtet ihre Frauen schwächlich waren, und wahrscheinlich zuerst sterben würden, zumal in den ersten Terminen. Indessen können sie doch mit noch grösserer Sicherheit für *Anfangs gesunde* Personen angenommen werden, als die Männer. Denn so viel mußte doch ein Mann von der Gesundheit seiner Frau wohl wissen, als er selbst von der seinigen zu bezeugen hatte, daß sie nämlich keine Krankheit habe, die ein baldiges Absterben mit Wahrscheinlichkeit vermuthen lasse. Es zeigen es auch die folgenden Tabellen, daß die in den ersten Terminen aufgenommenen Frauen nicht häufiger abgestorben sind, als die in den folgenden zugekommen sind.

Ausge-

Ausgesucht war übrigens diese Gesellschaft nur in Hinsicht der *dermaligen Gesundheit* der Mitglieder bey dem Eintritt in die Gesellschaft, nicht in Hinsicht der *körperlichen Constitution*, der Stärke und Festigkeit. Gesellschaften, worinn nur lauter *gesunde und starke* Personen eintreten, müssen natürlich eine noch geringere Sterblichkeit zeigen.

3.

2) Von *Frauen*, die anfangs Aufgenommen, nachher aber von der Gesellschaft getrennet wurden, hat man keine Nachricht, wenn sie gestorben sind. Einige davon giengen gleich im ersten Jahre ab, weil der Mann das Probejahr nicht überlebte. Diese können angesehen werden als solche, die gar nicht zu der Gesellschaft gehört haben, zumal da ihre Zahl im Ganzen nicht erheblich ist. Allein die übrigen, die von ihren Männern geschiedenen, die ausgeschlossenen, die wiederverheyraetheten, welche vor ihrer Absonderung einige Jahre bey der Gesellschaft gelebet hatten, müssen mit in Betracht gezogen werden. Es ist ein ganz anders, ob einige nie eingetreten, oder ob sie eingetreten, und nach einigen Jahren wiederum ausgetreten sind? Im letzten Fall haben sie diese Zeit durchlebet, ohne ihren Beytrag zur Todtenliste zu geben, das ist, es ist in der Zeit keine aus ihnen gestorben, was doch nach den Tabellen hätte geschehen sollen. Da in den von mir gebrauchten Verzeichnissen weder ihr Alter bey dem Eintritt, noch das Jahr bemerkt

war, wenn sie von der Gesellschaft getrennt worden sind, so habe ich in Hinsicht ihrer mir durch Hypothesen helfen müssen. Es ist angenommen:

a) In Hinsicht *ihres Alters beym Eintritt*, daß solches eben so verschieden gewesen sey, wie bey den übrigen zugleich Eingetretenen. Sie sind also verhältnismässig durch die Classen von diesen vertheilet. Die Zahl der aus ihnen *erwarteten* Todten ist also in demselben Verhältniß zu ihrer anfänglichen Zahl wie bey den übrigen.

b) Um zu finden, wie viel als *wirkliche Todte* für sie in Rechnung zu bringen sey, ist angenommen, daß sie im Durchschnitt die Hälfte der ganzen Zeit bey der Gesellschaft lebend geblieben, dann aber von diesem Alter an, nach den Tabellen abgestorben sind. Eine grössere Sterblichkeit, als die gemeine, kann man ihnen nicht beylegen. Diese konnte bey ihnen vielmehr auch in der Folge noch geringer seyn, als die tabellarische. Ein wenig ist auch darauf gesehen worden, wo z. B. die Zeit des Abgangs $15\frac{1}{2}$ Jahre ist, sind 8 Jahre für ihr Bleiben bey der Gesellschaft, und $7\frac{1}{2}$ Jahr der Trennung gerechnet. Im Ganzen macht dies keinen erheblichen Unterschied, zumal bey den *Frauen*. Ueberdies ist zur kürzern Berechnung der wirklichen Todten das anfängliche Alter dieser Frauen für gleich und so groß genommen, als das Durchschnitts-Alter der übrigen Recipirten.

3) Diese Correction hätte bey den *Frauen* allenfalls ganz wegbleiben können. Allein bey den Männern wird sie

sie wichtig und unentbehrlich. Es waren 1270 in allen im ersten Termin eingetreten. Davon sind in 16 Jahren 237 theils durch das Absterben der Frauen, theils weil sie ausgeschlossen worden, von der Gesellschaft getrennt, ohne daß bemerkt ist, wenn und in welchem Alter? Bey diesen mußte nach den vorher angezeigten beyden Voraussetzungen genauer gesucht werden, sowohl wie viel man *wirkliche* Todten, als auch wie viel nach den Tabellen zu *erwartende*, auf sie zu rechnen habe?

4.

4) Die Personen, die in Hinsicht des Alters zu einem und demselben Jahr-Fünft gehören, sind in den nachstehenden Tabellen zusammen genommen worden. Dafür ist das *Durchschnitts-Alter* derselben gebraucht. Aber die Zahl der *erwarteten* Todten ist nicht für alle nach dem Durchschnitts-Alter, sondern für jeden besondern Haufen nach seinem besondern Alter berechnet worden. So glaube ich diesen abgekürzten Tabellen eben die mannichfaltige und vielseitige Brauchbarkeit gelassen zu haben, welche die ausführlichen haben, die sonst so gleich vermindert wird, sobald man statt der reinen Erfahrungen Resultate aus ihnen vorleget.

Noch ist zu erinnern, daß, da in dem Verzeichnisse, das ich genutzt habe, das Alter der Personen nur nach den vollen zurückgelegten Jahren bestimmt war, so mußte sowohl bey der Berechnung des Durchschnitts-

Alters als der Todten jede ein halbes Jahr älter angenommen werden. Auch sind die erwarteten Todten nach Süßmilchs Sterblichkeits-Tafel berechnet. (Taf. IV.)

5.

5) Die *erste* Tabelle enthält die 1767 im Junius recipirten Personen, die am Schlufs des Jahrs 1783 in Gesellschaft gewesen sind. Die zwote enthält die das folgende halbe Jahr Eingetretenen, welche 15 Jahre zusammen gewesen sind. Es enthält also jede Tabelle die Sterblichkeit einer besondern Gesellschaft. Eigentlich stellen also diese Tabellen nicht die nach und nach von halben Jahr zu halben Jahre vorgefundene Sterblichkeit einer und derselben anfänglich zusammengetretenen Gesellschaft vor. Wenn die Anfangszusammengekommene Gesellschaft von 1270 für sich allein genommen, und das Absterben daraus von halben Jahren zu halben Jahren angegeben wäre, so würde man das Schicksal einer und derselben Gesellschaft haben. Sicher würde eine solche Tabelle lehrreich seyn. Vielleicht ist künftig Gelegenheit sie zu erhalten. Inzwischen ist man doch auch berechtigt, zumal jetzo noch, da an die größte Praecision nicht zu denken ist, die obigen Tabellen zu gebrauchen, als wenn sie zu Einer Gesellschaft gehörten. Man kann nämlich annehmen, daß in demselben Verhältnisse, worinn die Todten nach 2 Jahren stehen in der Gesellschaft N. 28., sie auch in der Gesellschaft der anfänglichen 1270 (N. 1.) nach 2 Jahren gestanden haben, u. f. f.

6. Zuerst

6.

Zuerst die Erfahrungen bey den Frauen.

1. Abweichung nach $15\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$18\frac{1}{2}$	14	4	2, 289
23	61	15	10, 953
$27\frac{1}{2}$	185	27	41, 222
$32\frac{1}{2}$	226	38	57, 797
$37\frac{1}{2}$	243	52	73, 354
$42\frac{1}{2}$	216	47	77, 978
47	127	36	54, 351
52	104	36	54, 013
57	49	24	30, 586
$62\frac{1}{2}$	20	12	14, 872
$67\frac{1}{2}$	7	7	5, 870
$70\frac{1}{2}$	1	0	0, 872
$39\frac{1}{2}$	1253	298	424, 157
Noch von	17	3 (*)	6, 55
	1270	301	430, 707

2. Abweichung nach 15 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
18	6	1	0, 939
$23\frac{1}{2}$	14	2	2, 620
28	34	8	7, 276
$32\frac{1}{2}$	43	10	10, 567
$37\frac{1}{2}$	28	4	8, 101
$42\frac{1}{2}$	29	5	9, 226
$47\frac{1}{2}$	25	7	10, 324
$52\frac{1}{2}$	8	3	4, 104
58	2	0	1, 252
36	189	40	54, 409
Noch von	7	1 (*)	2
	196	41	56, 41

(*) Hier sind bloß die ganzen Zahlen genommen. In den folgenden sind auch ein paar Decimalziffern hinzugesetzt.

3. Abweichung nach $14\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.-	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$17\frac{1}{2}$	3	0	0, 442
23	11	2	1, 962
$27\frac{1}{2}$	29	6	5, 972
$32\frac{1}{2}$	24	4	5, 620
$37\frac{1}{2}$	20	5	5, 645
43	21	3	7, 059
$47\frac{1}{2}$	11	1	4, 774
52	9	4	4, 245
57	5	4	2, 866
$37\frac{1}{2}$ Noch von	133 4	29 0, 67	38, 585 1, 16
	137	29, 67	39, 745

4. Abweichung nach 14 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
19	3	1	0, 447
$22\frac{1}{2}$	18	3	3, 039
27	23	3	4, 482
$32\frac{1}{2}$	25	7	5, 739
$36\frac{1}{2}$	18	4	4, 756
$42\frac{1}{2}$	18	4	5, 727
$47\frac{1}{2}$	12	1	4, 646
$54\frac{1}{2}$	1	1	0, 511
56	2	0	1, 088
34 Noch von	120 3	24 0, 76	30, 435 0, 76
	123	24, 76	31, 195

5. Ab.

5. Abweichung nach $13\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$18\frac{1}{2}$	8	0	1, 131
$22\frac{1}{2}$	14	3	2, 279
$27\frac{1}{2}$	29	9	5, 495
33	25	2	5, 580
$37\frac{1}{2}$	34	4	8, 487
42	13	2	3, 987
$47\frac{1}{2}$	8	3	2, 993
$52\frac{1}{2}$	6	1	2, 757
$57\frac{1}{2}$	4	2	2, 207
33 von	141 5	26 0, 6	34, 916 1, 312
	146	26, 6	36, 228

6. Abweichung nach 13 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$18\frac{1}{2}$	10	2	1, 344
$22\frac{1}{2}$	23	3	3, 614
$27\frac{1}{2}$	21	4	5, 500
$32\frac{1}{2}$	30	5	6, 330
$38\frac{1}{2}$	17	2	4, 250
$42\frac{1}{2}$	21	5	6, 158
$47\frac{1}{2}$	13	3	4, 617
$51\frac{1}{2}$	4	1	1, 724
$58\frac{1}{2}$	1	0	0, 539
$33\frac{1}{2}$ von	140 7	25 0, 86	34, 076 50
	147	25, 86	34, 576

7. Abweichung nach $12\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$18\frac{1}{2}$	7	1	0, 908
23	30	2	4 498
27	41	4	7, 088
$32\frac{1}{2}$	58	10	11, 564
$37\frac{1}{2}$	43	4	10, 161
$42\frac{1}{2}$	24	3	6, 831
47	26	3	8, 879
52	6	3	2, 433
$55\frac{1}{2}$	1	0	0, 473
$33\frac{1}{2}$ von	236 6 <i>Excludirten.</i>	30 0, 67	52, 835 1, 342
	242	30, 67	54, 177

8. Abweichung nach 12 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
19	7	0	0, 893
23	24	4	0 427
28	35	5	5, 951
$32\frac{1}{2}$	36	6	6. 945
$37\frac{1}{2}$	39	8	8. 697
42	27	7	7, 384
$47\frac{1}{2}$	10	0	3, 354
52	4	0	1, 516
$56\frac{1}{2}$	1	1	0 474
$63\frac{1}{2}$	1	1	0, 629
34 noch	184 6	32 0, 67	36, 270 1, 18
	190	32, 67	37, 45

9. Abweichung nach $11\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$18\frac{1}{2}$	9	2	1, 051
$22\frac{1}{2}$	15	4	1, 982
$27\frac{1}{2}$	51	5	8, 195
$32\frac{1}{2}$	36	9	6, 670
38	36	5	7, 788
42	25	2	6, 307
47	12	1	3, 701
52	7	1	2, 627
$57\frac{1}{2}$	2	1	0, 953
$63\frac{1}{2}$	1	0	0, 608
34 von	194 6	30 0, 6	39, 882 1, 75
	200	30, 6	41, 632

10. Abweichung nach 11 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
19	7	2	0, 790
$22\frac{1}{2}$	29	2	3, 675
27	40	3	6, 010
$32\frac{1}{2}$	40	8	7, 068
37	31	3	6, 235
$41\frac{1}{2}$	14	2	3, 375
48	10	2	3, 056
$51\frac{1}{2}$	2	0	0, 699
$55\frac{1}{2}$	2	0	0, 826
$60\frac{1}{2}$	1	0	0, 520
$32\frac{1}{2}$ von	176 8	23 0, 8	32, 254 1, 471
	184	23, 8	33, 724

11. Ab.

II. Abweichung nach $10\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
18 $\frac{1}{2}$	5	0	0, 536
23	21	2	2, 566
28	45	2	6, 390
32 $\frac{1}{2}$	46	8	7, 819
37 $\frac{1}{2}$	46	8	8, 888
42 $\frac{1}{2}$	18	2	4, 211
47 $\frac{1}{2}$	9	1	2, 621
52	4	2	1, 347
33 $\frac{1}{2}$ von	194 7	25 0, 6	34, 379 1, 236
	201	25, 6	35, 615

12. Abweichung nach 10 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
18	4	0	0, 390
22 $\frac{1}{2}$	32	0	3, 641
27 $\frac{1}{2}$	36	5	3, 924
32 $\frac{1}{2}$	37	9	5, 846
37 $\frac{1}{2}$	21	2	3, 846
41 $\frac{1}{2}$	14	2	2, 778
46 $\frac{1}{2}$	11	1	2, 905
52	5	1	1, 606
56 $\frac{1}{2}$	1	1	0, 392
32 von	161 4	21 0, 35	25, 328 0, 629
	165	21, 35	26, 057

13. Abweichung nach $9\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
18	7	1	0, 645
$22\frac{1}{2}$	31	4	3, 339
28	35	6	4, 559
$32\frac{1}{2}$	34	7	5, 119
$37\frac{1}{2}$	31	6	5, 305
$41\frac{1}{2}$	14	1	2, 835
47	8	1	2, 019
$52\frac{1}{2}$	5	2	1, 342
32 von	165 1	26 0, 035	25, 163 0, 152
	166	26, 035	25, 315

14. Abweichung nach 9 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$17\frac{1}{2}$	8	0	0, 714
$22\frac{1}{2}$	24	2	2, 442
28	26	6	3, 167
$32\frac{1}{2}$	33	2	4, 697
38	24	0	4, 024
$42\frac{1}{2}$	16	0	3, 088
$46\frac{1}{2}$	7	1	1, 664
$50\frac{1}{2}$	2	0	0, 548
$60\frac{1}{2}$	1	0	0, 431
$32\frac{1}{2}$ von	141 3	11 0, 24	20, 775 0, 443
	144	11, 24	21, 218

15. Abweichung nach $8\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$18\frac{1}{2}$	11	0	0, 899
23	28	2	2, 669
28	39	5	4, 478
$32\frac{1}{2}$	25	4	3, 348
$37\frac{1}{2}$	21	1	3, 190
$42\frac{1}{2}$	11	0	1, 903
48	7	1	1, 645
$52\frac{1}{2}$	3	1	0, 819
31 von	145 3	14 0, 21	18, 951 0, 393
	148	14, 21	19, 344

16. Abweichung nach 8 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$18\frac{1}{2}$	5	0	0, 382
$23\frac{1}{2}$	18	1	1, 638
$27\frac{1}{2}$	31	6	3, 279
32	30	2	3, 709
37	17	1	2, 704
42	15	0	2, 515
$48\frac{1}{2}$	7	0	1, 543
$51\frac{1}{2}$	1	0	0, 251
$58\frac{1}{2}$	1	0	0, 324
$32\frac{1}{2}$ von	125 1	10 0, 07	16, 345 0, 131
	126	10, 07	16, 476

17. Abweichung nach $7\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$18\frac{1}{2}$	7	0	0, 502
23	23	4	1, 908
28	41	4	4, 056
32	47	2	5, 661
$37\frac{1}{2}$	16	4	3, 140
$42\frac{1}{2}$	8	2	1, 267
47	8	0	1, 580
52	3	1	0, 698
31 von	153	17	18, 812
	3	0, 18	0, 369
	156	17, 18	19, 181

18. Abweichung nach 7 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$18\frac{1}{2}$	13	1	0, 868
$22\frac{1}{2}$	33	1	2, 528
27	34	0	3, 048
32	35	1	3, 726
37	17	3	2, 087
$42\frac{1}{2}$	16	1	2, 368
$46\frac{1}{2}$	8	0	1, 437
$51\frac{1}{2}$	3	0	0, 659
$30\frac{1}{2}$ von	159	7	16, 721
	2	0, 114	0, 235
	161	7, 114	16, 956

19. Abweichung nach $6\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$18\frac{1}{2}$	7	0	0, 438
22	12	1	0, 833
$27\frac{1}{2}$	29	3	2, 434
32	30	2	3, 008
37	14	1	1, 610
$42\frac{1}{2}$	9	0	1, 225
$47\frac{1}{2}$	6	0	1, 054
$51\frac{1}{2}$	1	0	0, 204
31 von	108 4	7 0, 19	10, 806 0, 400
	112	7, 19	11, 206

20. Abweichung nach 6 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
19	7	0	0, 404
23	13	0	0, 846
$27\frac{1}{2}$	28	1	2, 167
$32\frac{1}{2}$	34	4	3, 162
$37\frac{1}{2}$	15	0	1, 605
$42\frac{1}{2}$	18	1	2, 256
48	3	0	0, 489
$51\frac{1}{2}$	3	0	0, 188
$31\frac{1}{2}$ von	121 3	6 0, 15	11, 117 0, 276
	124	6, 15	11, 393

21. Abweichung nach $5\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$18\frac{1}{2}$	5	0	0, 258
$22\frac{1}{2}$	18	1	1, 040
$27\frac{1}{2}$	34	0	2, 389
$32\frac{1}{2}$	22	3	1, 847
$37\frac{1}{2}$	25	1	2, 444
$42\frac{1}{2}$	8	2	0, 896
$46\frac{1}{2}$	1	0	0, 140
$50\frac{1}{2}$	2	0	0, 334
31 von	115 2	7 0, 08	9, 348 0, 162
	117	7, 08	9, 510

22. Abweichung nach 5 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
19	6	0	0, 287
$22\frac{1}{2}$	20	3	1, 049
27	30	0	1, 883
$32\frac{1}{2}$	24	1	1, 836
$37\frac{1}{2}$	25	1	2, 222
42	11	0	1, 098
$48\frac{1}{2}$	8	0	1, 107
53	3	0	0, 497
$32\frac{1}{2}$ von	127 1	5 0, 04	9, 979 0, 078
	128	5, 04	10, 057

23. Abweichung nach $4\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$19\frac{1}{2}$	2	0	0, 088
$22\frac{1}{2}$	17	1	0, 798
$27\frac{1}{2}$	33	0	2, 429
$32\frac{1}{2}$	30	1	2, 019
$37\frac{1}{2}$	28	0	2, 224
$42\frac{1}{2}$	8	0	0, 722
47	5	0	0, 574
$31\frac{1}{2}$ von	123	2	8, 854
	1	0, 03	0, 072
	124	2, 03	8, 926

24. Abweichung nach 4 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$17\frac{1}{2}$	1	0	0, 035
$22\frac{1}{2}$	18	1	0, 754
27	27	2	1, 357
$32\frac{1}{2}$	19	1	1, 149
$37\frac{1}{2}$	17	1	1, 193
43	8	1	0, 646
48	7	0	0, 741
$51\frac{1}{2}$	2	1	0, 252
$32\frac{1}{2}$ von	99	7	6, 127
	1	0, 03	0, 067
	100	7, 03	6, 194

25. Ab-

25. Abweichung nach $3\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$19\frac{1}{2}$	3	0	0, 102
$22\frac{1}{2}$	22	0	0, 786
$27\frac{1}{2}$	25	0	1, 088
$32\frac{1}{2}$	17	0	0, 878
37	19	1	1, 173
$42\frac{1}{2}$	11	0	0, 778
48	8	0	0, 741
$50\frac{1}{2}$	2	0	0, 214
$55\frac{1}{2}$	1	0	0, 126
$32\frac{1}{2}$	108	1	5, 886

26. Abweichung nach 3 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$18\frac{1}{2}$	7	0	0, 191
$22\frac{1}{2}$	22	0	0, 703
$27\frac{1}{2}$	28	0	1, 060
$32\frac{1}{2}$	26	1	1, 151
$37\frac{1}{2}$	26	2	1, 377
$42\frac{1}{2}$	14	0	0, 842
46	4	0	0, 286
$50\frac{1}{2}$	1	0	0, 090
$32\frac{1}{2}$	128	3	5, 700
von	1	0, 02	045
	129	3, 02	5, 745

27. Abweichung nach $2\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
18	8	0	0, 176
23	18	0	0, 468
$27\frac{1}{2}$	28	2	0, 853
$32\frac{1}{2}$	13	0	0, 528
$37\frac{1}{2}$	9	0	0, 398
42	3	0	0, 148
$47\frac{1}{2}$	5	0	0, 295
$52\frac{1}{2}$	1	0	0, 080
29	85	2	2, 946

28. Abweichung nach 2 Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
19	4	1	0, 074
$22\frac{1}{2}$	16	1	0, 333
$27\frac{1}{2}$	10	0	0, 307
$32\frac{1}{2}$	12	0	0, 344
38	7	0	0, 250
$41\frac{1}{2}$	0	0	0, 382
$51\frac{1}{2}$	2	0	0, 126
31	61	2	1, 816

29. Abweichung nach $1\frac{1}{2}$ Jahren.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
19	2	0	0, 026
23	7	0	0, 110
$27\frac{1}{2}$	7	0	0, 124
$30\frac{1}{2}$	3	0	0, 063
$37\frac{1}{2}$	6	0	0, 157
$43\frac{1}{2}$	1	0	0, 030
$45\frac{1}{2}$	1	0	0, 030
$29\frac{1}{2}$	27	0	0, 540

30. Abweichung nach 1. Jahr.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todten.	Erwartete Todten.
$24\frac{1}{2}$	1	0	0, 01
$29\frac{1}{2}$	1	0	0, 01
$36\frac{1}{2}$	1	0	0, 02
$63\frac{1}{2}$	1	1	0, 05
38	4	1	0, 09

7.

Nimmt man alle diese 30 Tabellen zusammen, so ist die *anfängliche Zahl*, die Zahl der *Wirklichen Todten* und die Zahl der *Erwarteten*,

5221 ; 743 ; 1048.

Und das Verhältniß der beyden letzten Zahlen ist

0, 7 : 1.

B 3

Werden

Werden die in dem ersten Termin beym Anfang der Gesellschaft Zusammengetretenen besonders genommen, so hat man die Zahlen 1270; 301; 431, und das Verhältniß der beyden letztern wiederum 0,7 : 1.

Für die nachher hinzugekommenen sind die Zahlen, 3951; 441; 623, und gleichfalls $441 : 623 = 0,7 : 1$.

8.

Dieses Verhältniß bleibt noch dasselbe, wenn man die Correctionen der Tabellen gleich wegläßt. Denn in diesem Fall hat man

die Zahl der *Aufgenommenen*; der *wirkl. T.*; der *Erwart.*
 aus d. *ersten Termin* 1253 — — 298 — — 424,16
 aus den *folgenden* 3862 — — 432 — — 603,31

5115 — — 730 — — 1027,47

Das Verhältniß der *Wirklichen* zu den *Erwarteten* ist wiederum nahe an 0,7 : 1.

9.

Das Verhältniß der *wirklichen Todten* zu den *Erwarteten*, ist insonderheit

in der 1 ^{sten}	Abw. nach	15½ Jahren,	=	0,7	: 1
— 2 ^{ten}	—	15	—	=	0,73 : 1
— 3 ^{ten}	—	14½	—	=	0,75 : 1
— 4 ^{ten}	—	14	—	=	0,8 : 1
— 5 ^{ten}	—	13½	—	=	0,73 : 1
— 6 ^{ten}	—	13	—	=	0,73 : 1
— 7 ^{ten}	—	12½	—	=	0,57 : 1
— 8 ^{ten}	—	12	—	=	0,87 : 1

in

in der 9ten Abw. nach $11\frac{1}{2}$ Jahren,	$\equiv$	0, 71 : 1
— 10ten — — 11 —	$\equiv$	0, 7 : 1
— 11ten — — $10\frac{1}{2}$ —	$\equiv$	0, 7 : 1
— 12ten — — 10 —	$\equiv$	0, 82 : 1
— 13ten — — $9\frac{1}{2}$ —	$\equiv$	1, 04 : 1
— 14ten — — 9 —	$\equiv$	0, 53 : 1
— 15ten — — $8\frac{1}{2}$ —	$\equiv$	0, 74 : 1
— 16ten — — 8 —	$\equiv$	0, 61 : 1
— 17ten — — $7\frac{1}{2}$ —	$\equiv$	0, 9 : 1
— 18ten — — 7 —	$\equiv$	0, 42 : 1
— 19ten — — $6\frac{1}{2}$ —	$\equiv$	0, 64 : 1
— 20sten — — 6 —	$\equiv$	0, 54 : 1
— 21sten — — $5\frac{1}{2}$ —	$\equiv$	0, 73 : 1
— 22sten — — 5 —	$\equiv$	0, 5 : 1
— 23sten — — $4\frac{1}{2}$ —	$\equiv$	0, 2 : 1
— 24sten — — 4 —	$\equiv$	1, 13 : 1
— 25sten — — $3\frac{1}{2}$ —	$\equiv$	0, 17 : 1
— 26sten — — 3 —	$\equiv$	0, 52 : 1
— 27sten — — $2\frac{1}{2}$ —	$\equiv$	0, 68 : 1
— 28sten — — 2 —	$\equiv$	1, 1 : 1
— { 29sten — — $1\frac{1}{2}$ }	$\equiv$	1, 4 : 1
— { 30sten — — 1 }		

Alle diese Verhältnisse geben auch zum
Mittel-Verhältniß 0, 7 : 1.

IO.

Nimmt man die zu gleichem Alter beym Eintritt gehörigen Personen aus allen Tabellen zusammen; oder statt des gleichen Alters dasselbige Quinquennium, so erhält man folgende Tabelle, wo aber die obgedachten Correctionen weggelassen sind.

Alter bey dem Eintritt.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todte.	Erwartete.	Verhältniß der Wirkl. zu den Erw.
15—20	186	16	17, 25	0, 92 : 1
20—25	633	64	63, 51	1, 08 : 1
25—30	1055	114	146, 18	0, 78 : 1
30—35	1060	147	179, 79	0, 82 : 1
35—40	894	123	185, 33	0, 66 : 1
40—45	621	92	164, 02	0, 56 : 1
45—50	367	62	121, 57	0, 52 : 1
50—55	194	58	83, 88	0, 69 : 1
55—60	72	33	42, 11	0, 78 : 1
60—65	25	14	17, 11	0, 82 : 1
65—70	7	7	55, 87	1, 04 : 1
70 u. drüber.	1	0	20, 87	
Durchschn. Alter $34\frac{1}{2}$	5115	730	1027	8, 67 : 11 = 0, 79 : 1

Hier fehlen nun noch 106 Eingetretene, woraus 13 als wirklich Gestorbene, und 21 als Erwartete in Anschlag kommen. Bey diesen ist das Verhältniß nahe 0, 6 : 1. Dieß müßte noch hinzukommen. Ueberhaupt aber ist dieß mittlere Verhältniß nicht viel brauchbar.

Sondert man die unter 35 jährigen von denen ab, die älter im Anfang gewesen sind, so ist das Verhältniß der *wirklich Gestorbenen* zu den *Erwarteten* 0, 84 : 1 und bey den letztern 0, 64 : 1, wenn man sie alle zusammen nimmt. Werden auch bloß die anfänglichen 1270 in der ersten Tafel verglichen, so findet man das gedachte Verhältniß bey den unter 35 jährigen 0, 74 : 1, und bey den ältern 0, 68 : 1. Da ist der Unterschied zwar geringer, aber doch immer noch die Abweichung bey den jüngern

jüngern geringer. ! Dieß beflätiget Hrn. *Kritters* Gedanken, daß auch die gemeine Sterblichkeit bey den Ehefrauen nach dem Alter 35 bis 36 Jahre geringer fey, als die Süßmilchische Tafel fie angiebt, wenn fie gleich bis dahin damit nahe zusammentreffend gewesen fey. Denn wenn die tabellarische Sterblichkeit fo wäre, wie nach *Süßmilchs* Tafel, fo müßte in der ausgefuchten Gesellschaft die Sterblichkeit bey den ältern fich der tabellarischen mehr nähern, als bey den jüngern, davon hier das Gegentheil ftatt findet.

II.

In Hinficht der *Ehemänner* habe ich nichts mehr als die folgende 31ste Tabelle.

Tab. 31.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirckliche Tode nach 16 Jahren.	Erwartete in eben der Zeit nach Süßmilch.
23 $\frac{1}{2}$	2	0	0, 410
28	21	4	4, 900
33	86	18	23, 085
37 $\frac{1}{2}$	157	33	49, 815
43	169	43	63, 260
47	196	85	87, 671
53	154	80	82, 585
57 $\frac{1}{2}$	120	90	77, 313
62 $\frac{1}{2}$	77	63	57, 763
68	43	34	35, 802
72 $\frac{1}{2}$	8	7	7, 206
47 $\frac{1}{2}$	1033	457	489, 8

Das Verhältniß der wirklichen Todten zu den Erwarteten ist 0, 93 : 1.

Allein hier ist die Zahl der Anfangs eingetretenen, die nachher von der Gesellschaft getrennt sind, und um die man sich nicht weiter bekümmert hat, ansehnlich, nämlich 237. Werden auch diese nach den obigen Voraussetzungen in §. 3. vertheilet, so erhält man folgende Tabelle.

Tab. 32.

Durchschn. Alter.	Anfangs- zahl.	Wirkliche Todte.	Erwartete Todte.
23 $\frac{1}{2}$	0,5	0,	0, 1
28	4,5	0, 696	1, 17
33	20	3, 2	5, 36
37 $\frac{1}{2}$	36	7, 16	11, 42
43	39	9, 65	14, 61
47 $\frac{1}{2}$	45	13, 23	20, 14
53	35	13, 75	18, 77
57 $\frac{1}{2}$	27	7, 31	17, 13
62 $\frac{1}{2}$	18	10, 3	13, 51
66	10	6, 44	8, 3
72 $\frac{1}{2}$	2	1, 48	1, 8
47 $\frac{1}{2}$	237	69	112

Also wird die Summe aller *wirklichen* Todten $= 457 + 69 = 526$; und die Summe aller Berechneten $490 + 112 = 602$, und das Verhältniß $526 : 602 = 0,87 : 1$.

Dieselbige Summe der *berechneten* Todten findet man auch ganz nahe eben so, wenn auf einmal $1033 : 490 = 237 : 112$ genommen wird. Eben so wenn, um die *wirklichen* Todten zu finden, alle 237 beym

beym Eintritt vom gleichen Durchschnitts - Alter, $47\frac{1}{2}$ Jahr angenommen werden, dann 8 Jahr in der Gesellschaft gelebet haben, und darauf als $55\frac{1}{2}$ jährige in 8 Jahren nach den Tabellen weggestorben seyn sollen. Es wird die Zahl der wirklich Todten 69, wie vorher.

I2.

Für jede Classe von Personen, in Hinsicht des Alters nach Quinquennien vertheilet, ist das Verhältniß wie folget.

Alter.	Verhältniß.	Alter.	Verhältniß
20—30 Jahr.	0, 71 : 1	50—55 Jahr.	0, 92 : 1
30—35	0, 75 : 1	55—60	1, 03 : 1
35—40	0, 66 : 1	60—65	1, 02 : 1
40—45	0, 68 : 1	65—70	0, 92 : 1
45—50	0, 91 : 1	70—75	0, 94 : 1

Das Mittel aus diesen ist 0, 85 : 1, dafür aber richtiger nach dem vorhergehenden 0, 87 : 1 genommen wird. Denn der mittlere Werth für dies Verhältniß darf nicht aus einzelnen besondern Werthen desselben gesucht werden. Diese GröÙe ist veränderlich ihrer Natur nach. Aber wenn die Zahlen der Todten in mehreren Fällen zusammen genommen werden, so kommt ein Mittel heraus, das sich brauchen läßt.

Sondert man die unter 45 jährigen ab von den ältern, so ist das Verhältniß für jene jüngere gewesen = 0, 68 : 1
und für die über 45 jährigen = 0, 95 : 1

Die

Die unter 45 jährigen Ehemänner haben also eine geringere Sterblichkeit gehabt, als die unter 35 jährigen Frauen; allein die über 45 jährigen haben sie gröfser, und nahe so grofs gehabt, als die gemeine ist nach der Süßmilchischen Tafel.

13.

Dafs im Ganzen das Verhältnifs der wirklich Gestorbenen zu den Erwarteten bey den Männern gröfser ist, als bey den Frauen, jenes nämlich $0,87 : 1$, dieses $0,7 : 1$ bestätigt noch für sich nicht, was sonst wahrscheinlich ist, dafs die Sterblichkeit des *weiblichen Geschlechts* auch in *communi vita* etwas geringer sey als bey den Männern. Die Sterblichkeit kann im gemeinen Leben bey beyden Geschlechtern gleich grofs seyn, und dennoch mußte hier bey den Männern jenes Verhältnifs gröfser seyn aus zweyen Ursachen. Sie waren durchgehends beym Eintritt älter. Ihr Durchschnitts-Alter war $47\frac{1}{2}$ Jahr; der Frauen ihres nur $34\frac{1}{2}$. Dazu wird bey den Männern das obige Verhältnifs nach 16 Jahren bestimmt, bey den Frauen ist es bey der gröfsten Zahl derselben nach einer kürzern Zeit berechnet. Es versteht sich, je älter die Personen sind, und je länger die Zeit des Aussterbens, desto mehr muß sich das Verhältnifs der wirklich Gestorbenen zu den tabellarischen der Gleichheit nähern.

Um hier richtig zu vergleichen, kann nur die erste Tabelle bey den Ehefrauen, welche die Abweichung nach $15\frac{1}{2}$ Jahren giebt, gebraucht werden. Die 31ste und 32ste von den Männern enthält sie nach 16 Jahren. Dieser Unterschied ist nicht erheblich. Dann ist

Alter.	Verhältniß bey den <i>Frauen.</i>	Verhältniß bey den <i>Männern.</i>
20—30	0, 81 : 1	0, 71 : 1
30—35	0, 60 : 1	0, 75 : 1
35—40	0, 71 : 1	0, 66 : 1
40—45	0, 60 : 1	0, 68 : 1
45—50	0, 67 : 1	0, 91 : 1
50—55	0, 67 : 1	0, 92 : 1
55—60	0, 77 : 1	1, 03 : 1
60—65	0, 80 : 1	1, 02 : 1
65—70	1, 19 : 1	0, 92 : 1

Nimmt man alle *unter 45 jährige* bey beyden Geschlechtern zusammen, um einen Durchschnitts-Werth zu haben, so wird das Verhältniß *bey den Frauen* 0, 69 : 1
— — — *bey den Männern* 0, 68 : 1
so weit gleich; oder doch bey den Männern, wenn auf das halbe Jahr Unterschied in der Zeit gesehen wird, nur sehr wenig geringer.

Allein, wenn die über 45 jährigen verglichen werden, so ist solches *bey den Frauen* 0, 73, und *bey den Männern* 0, 95.

Daraus läßt sich schliessen, daß bey solchen Instituten zur Versorgung der Wittwen sich annehmen lasse,

es sey das Verhältniß der *wirklich Gestorbenen* zu den *berechneten nach einer Zeit von 16 Jahren* (die *Sterblichkeit während dieses Zeitraums*, denn mehr heißt das nicht) *einander gleich bey Männern und Frauen, die nicht älter sind als 45 Jahr bey dem Eintritt; dagegen, wenn sie älter sind, sey solche bey den Frauen auf 0,7 : 1 und bey den Männern 0,9 : 1 zu schätzen.*

14.

So weit gehen die Erfahrungen, die ich aus den gebrachten Registern der Calenbergischen Gesellschaft habe ziehen können. Wichtig allerdings, um einigermaßen über die Grösse des Unterschiedes urtheilen zu können. Aber doch auch zu mangelhaft, daß man nicht Ursachen hätte künftig dergleichen noch mehr zu sammeln.

15.

Einige andere hieher gehörige Erfahrungen habe ich aus einer Tabelle gezogen, die ein Engländer *Dale* seinem mit Einsicht und Fleiß geschriebenen *Supplement to calculations of the Values of Annuities* (*) beygefüget hat.

Es

(*) Der etwas lange Titel heißt so: *Supplement to calculations of the Values of Annuities, published for the use of Societies instituted for Benefit of Age. Containing various illustrations of the doctrine of Annuities, and complet Tables of the Value of 1. L. immediate Annuity. Together*

Es ist durch 7 Jahre von Jahr zu Jahr nach *Halley's* Tafel berechnet, wie viele von den Interessenten hätten abgehen sollen, und damit sind die wirklich Gestorbenen verglichen. Solche Vergleichen sind nicht genug, wenn etwas Allgemeines daraus soll gefolgert werden, wie sich unten weiter zeigen wird. Es wird dabey nicht unterschieden, wie lange die von gleichem Alter vorhandene Personen schon in der Gesellschaft gelebet haben? Die in demselben Jahr erst Eingetretene werden mit denen zusammen genommen, die in den vorhergehenden Jahren nach und nach hinzu gekommen sind. Eigentlich sollten die zugleich Eingetretene für sich allein nach ihrem allmählichen Absterben bemerkt werden. Indessen ist jenes auch nicht ganz unbrauchbar. Wenn man mehr solche Tabellen hätte, wie *Deparcieux* seine von den Renteniers, die gleichfalls als eine ausgesuchte Gesellschaft zu betrachten sind, so liesse sich allerley nützlichcs daraus folgern. Diese sehe ich nämlich auch
als

Together with investigations of the State of the laudable Society of Annuityants, shewing what Annuity each Member hath purchased, and real Mortality therein from its Institution, compared with D. Halley's Table. London. 1777. Diese so genannte laudable Society kennt man aus *D. Price*. Sie gehöret zu den unbestehbaren Instituten, die auf einen ohngefahren Ueberschlag, und auf sehr unbestimmte Grundfätze gebauet sind. Dergleichen giebt es jenseits des Meers so gut als bey uns.

als so eine an, welche sagt, wie viele von der Zahl der vorhandenen Mitglieder von jedem Alter jährlich abgehen, ohne Unterschied, ob es neue oder alte Genossen sind.

Was ich aus *Dale's* Rechnungen habe ziehen können als brauchbar zu meiner gegenwärtigen Untersuchung, zeigen folgende Tabellen.

Tab. 33.

Die aufgeführten Mitglieder sind zugleich eingetreten, und die Todten sind die, welche in dem ersten Jahr erfolgt sind.

Ihr Alter.	Durchschn. Alter.	Anfangszahl.	Wirkliche Todte.	Berechnete Todte nach Süßmilch.
20—30	25 $\frac{1}{2}$	42	1	0, 45
30—40	36	121	1	2, 1
40—50	44	100 (*)	2	3,
50—60	55	6	0	0, 21
20—60	37	269	4	5, 76

Das Verhältniß der wirklich Gestorbenen zu den berechneten ist 0, 7 : 1.

16. Die

(*) Von den letzten 100 waren einige schon länger in der Gesellschaft gewesen. Man kann die Zeit zu 1 $\frac{1}{2}$ Jahr annehmen, und die Erwarteten zu 3 ansetzen, sonst würden es nur 2, 02 seyn.

16.

Die folgende Tabelle zeigt, wie viele Personen eines bestimmten Alters durch eine Erfahrung von 7 Jahren gestorben sind, in Vergleich mit denen, welche nach *Halley's* Tafel hätten sterben sollen. Hier aber ist das Alter nicht das Alter beym Eintritt in die Gesellschaft, sondern überhaupt das Alter der Personen, aus denen in demselben Jahr der Abgang geschehen ist. Ueberdies sind es ohne Zweifel Personen von beyden Geschlechtern gewesen.

Tab. 34.

Alter der Personen.	Wirkliche Todten.	Berechnete nach Halley.
1—20	4	2, 3084
20—30	11	10, 9904
30—40	23	39, 0923
40—50	33	62, 2487
50—60	17	40, 7081
60—70	5	7, 5337
	93	162, 882

Dieses Verhältniß ist 0, 57 : 1. Nach *Süssmilch's* Tafel ist es nahe dasselbe. Ueberhaupt waren aus 1469 in die Gesellschaft aufgenommenen von verschiednem Alter, während 7 Jahren gestorben 93, statt daß nach *Halley* hätten sterben sollen 163.

17.

Noch zwei solche Tabellen will ich aus *Morgan* (*) und *D. Price* (**) hier anfügen, in denen aber nichts weiter als das Verhältniß angegeben ist, die also auch wenig mehr brauchbar sind, als zur Bestätigung von Schlüssen, die man aus andern genauer angegebenen Erfahrungen gezogen hat. Das Verhältniß nach *Süssmilchs* *Tafel* habe ich zugleich angefüget.

Tab. 35.

In einer Annuitäten Gesellschaft ist nach 9 Jahren das Verhältniß der wirklich Gestorbenen zu den Berechneten gewesen

bey Personen vom Alter	nach der <i>Londoner</i> <i>Tafel</i> .	nach <i>Halleys</i>	nach <i>Süssmilchs</i>
20—30	7 : 17	5 : 9	0, 63 : 1
30—40	3 : 5	5 : 6	0, 95 : 1
40—50	1 : 2	6 : 7	1, 06 : 1
50—60	2 : 3	5 : 6	0, 86 : 1
60—70	14 : 11	5 : 3	1, 42 : 1
20—70 d. i. aus allen	2 : 3	11 : 13	0, 87 : 1

Tab.

(*) *Doctrine of Annuities*. p. 37.

(**) *Observatt. on reversionary Payments*. Vol. 2. Ed. 4.

Tab. 36.

Nach 12 Jahren ist in einer Gesellschaft das Verhältniß der Gestorbenen zu den Berechneten gewesen

bey dem Alter	nach der <i>Londoner</i> Tafel	nach <i>Halley</i>	nach <i>Stüßmilch</i>
10—20	4 : 5	1 : 1	1, 13 : 1
20—30	3 : 7	2 : 3	0, 75 : 1
30—40	4 : 9	2 : 3	0, 76 : 1
40—50	3 : 5	8 : 9	0, 96 : 1
50—60	2 : 3	6 : 7	0, 86 : 1
60—70	9 : 10	9 : 8	1, 05 : 1

Hier ist wiederum das Alter der Personen dasjenige, worinnen sie gewesen sind bey dem Sterben, nicht das anfängliche, in dem sie in die Gesellschaft getreten sind.

Ich habe es oben schon erinnert, wenn man nur solche Verhältnisse sucht, so läßt sich auch die Sterblichkeits-Tafel der Rentenierer von *Deparcieux* dazu gebrauchen. Allein diese enthält nicht bloße Erfahrungen. Sie enthält Resultate aus Erfahrungen, worunter manche wohl nur auf einem ohngefähren Ueberschlag beruhen. Sie kann also nicht so, wenigstens hier nicht gebraucht werden, als die obigen.

Zweyter Abschnitt.

Allgemeine Bestimmung der Abweichung der Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften von der im gemeinen Leben.

18.

Durch eine Betrachtung aus der Natur der Sache, durch eine theoretische Speculation, wenn man will, kann man der Erfahrung oftmals auf halbem Wege entgegen kommen. Ich habe versucht, was sich hier thun lasse? Jene kann wenigstens zeigen, welche Erfahrungen man haben, und wie man sie verbinden müsse, um allgemeine Sätze daraus zu ziehen. Das ist Dienst genug. Facta können nicht aus Begriffen a priori erkannt werden; aber a priori kann man die Methode finden, wie Facta gesammelt, geordnet und verglichen werden müssen, um das Gesetz ihrer Folge zu erkennen.

19.

Es versteht sich von selbst, was hier *ausgesuchte Gesellschaften* seyn sollen; solche nämlich, deren Genossen beym Eintritt als *gesund* wenigstens, oder auch als *gesunde und starke* Personen, anzusehen sind. Man könnte auch lauter schwache und kranke aussuchen. Erfahrungen über die Sterblichkeit in Hospitälern, sind auch an sich und zu andern Absichten brauchbar. Hier aber setze ich solche bey Seite.

Der Kürze wegen soll die Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften, welche die Erfahrung zeigt, hier die *wirkliche* Sterblichkeit heißen. Die *tabellarische* dagegen diejenige, welche nach den Tabellen statt findet. Es versteht sich, daß so wenig bey jener als bey dieser davon die Rede sey, was in jedem einzelnen Fall, in jeder kleinen Gesellschaft, in jedem einzeln Jahr sich zeigt. Sie muß als ein *Mittel*, oder *Durchschnitt* aus mehreren einzelnen Erfahrungen genommen werden.

20.

Daraus folgt denn von selbst: *Wenn aus einer bestimmten Zahl a , von Personen gleichen Alters, während einer bestimmten Zeit, z gestorben sind und y noch leben, so wird auch aus der anfänglichen Zahl $r. a$, die Zahl der Gestorbenen in derselben Zeit $r. z$, und die Zahl der noch übrig gebliebenen $r. y$ seyn.*

21.

Als Grundsatz wird folgendes angenommen: *Die wirkliche Sterblichkeit kann in ausgesuchten Gesellschaften, worin sie Anfangs geringer ist, als die tabellarische, nachher nie wieder größer werden, als die letztere, (auch nicht kleiner wenn sie Anfangs größer gewesen ist.) Sie muß sich der letztern immer mehr nähern, bis sie ihr, wenn nicht eher, doch im letzten Lebensjahre gleich wird.*

Die Sterblichkeit ist in jedem Fall in dem höchsten Lebensjahr $= 1$, in ausgesuchten Gesellschaften so wohl als im gemeinen Leben. Beyde können aber eher schon einander gleich seyn. Ist die ausgesuchte Gesellschaft so eine nur in Hinsicht der anfänglichen Gesundheit, so kann die Folge davon nur auf eine gewisse Zeit dauern. Aber es ist gar kein Grund vorhanden, warum die wirkliche Sterblichkeit jemals wieder grösser werden sollte als die tabellarische, wenn sie Anfangs in den ersten Jahren kleiner ist. Eben so in dem entgegengesetzten Fall. Findet sich nun in einzelnen Fällen dieß anders, so gehören solche bloß zu den einzelnen Fällen, die keine allgemeine Regel geben.

Ist die Zahl der Lebenden im Anfang eines Jahrs, oder eines Theils davon y , und der Abgang durch den Tod während dieses Zeitraums $\Delta y = \Delta z$, wo Δz die *Zunahme der Gestorbenen* ist, so ist $\frac{\Delta z}{y}$ die *Sterblichkeit*. Nun sey $\frac{\Delta z'}{y'}$ in der ausgesuchten Gesellschaft, was $\frac{\Delta z}{y}$ für dieselbige Zeit nach den Tabellen ist, so ist $\frac{\Delta z'}{y'} = S'$ die *wirkliche Sterblichkeit*; $\frac{\Delta z}{y} = S$ die *tabellarische*.

22.

Zusatz. Es sey $\frac{\Delta z}{y} - \frac{\Delta z'}{y'} = D$ nach einer bestimmten Zeit, so kann auch diese Differenz in der Folge
nicht

nicht wiederum grösser werden, sie sey Anfangs nun positiv oder negativ. Der Vorzug an minderer Sterblichkeit aus der anfänglichen Gesundheit kann nachher nicht mehr wachsen: eben so der anfängliche Nachtheil nachher nicht mehr zunehmen.

Das Verhältniß der Sterblichkeit ist

$$= S : S' = S : S - D = 1 : 1 - \frac{D}{S}$$

Nimmt nun die tabellarische Sterblichkeit S immer zu, und die Differenz ab, so wird auch ihr Verhältniß gegen einander sich immer mehr der Gleichheit nähern. Nimmt aber die Sterblichkeit S auch wiederum ab, so wird ihr Verhältniß sich auch wiederum von der Gleichheit entfernen.

23.

Ferner nehme ich als Grundsatz dies an. *Das höchste Alter des menschlichen Lebens ist in der ausgesuchten Gesellschaft dasselbe, wie im gemeinen Leben.* In jener können und mögen mehrere Personen diese höchste Stufe erreichen; allein sie selbst setze ich nicht höher an, als die in den Tabellen. In dem vermischten Haufen wird es doch auch Einen oder den andern geben, der eben so hoch hinaufkommt, wenn die anfängliche Zahl der Personen nur groß genug genommen wird.

Die *Sterblichkeits-Linie* kann als *asymptotisch* angenommen werden, (*Einleit. von Leibrenten. Zusatz zum 2ten Cap. §. 11.*) Daraus könnte man schließen, das

höchste Lebensjahr sey selbst in den Tabellen höher oder niedriger zu setzen, je nachdem man die Grundzahl oder die Zahl der Gebornen in ihnen grösser oder kleiner nimmt. Allein eigentlich sollte das *höchste Lebensziel* das Jahr seyn, über welches kein Individuum aus jeder *endlichen* Anfangszahl, wie groß sie auch sey, hinauskommt. Alsdenn ist zwischen einer grossen und kleinen Gesellschaft kein anderer Unterschied, als dass von jener mehrere, von dieser weniger solches erreichen. Geht man von diesem festen Begriff ab, so wird das höchste Ziel schwankend. Uebrigens kommt nicht viel, bey denen von jüngern Alter gar nichts, darauf an, ob man ein paar Jahr höher oder niedriger geht.

24.

Es sey M N P R G (Fig. 1.) die *Linie der Sterblichkeit* nach den Tabellen, die aus dem gemeinen Leben genommen sind. Die *Abscissen* A B, A C, A D, u. s. f. die *Lebensjahre*, A G das *höchste Alter*. Die *Ordinate* A M ist die *Grundzahl* der Tafel, die *Zahl der Gebornen*. B N und die übrigen *Ordinaten* stellen die noch Lebenden vor, zu einer bestimmten Zeit. Wird durch N eine Parallele mit A G, nämlich N G' gezogen, so sind P C', R D', G G', die Gestorbenen aus B N während der Zeiten, welche durch die zugehörigen *Abscissen*, von B angefangen, bezeichnet sind.

Die Zahl der Lebenden B N sey eine eben so grosse Zahl ausgesuchter Personen, die alle von gleichem Alter

A B

A B in eine Gesellschaft zusammentreten. Die *Sterblichkeits-Linie* für diese Gesellschaft sey $N p r G$. Es sey überhaupt die Abscisse von B an $= x$. Sie wird endlich B G, oder die *Altersergänzung*.

Ferner sey die Anfangszahl $B N = a$

Die Ordinaten $C P, D R, u. f. f. = y$

$C p, D r, E s, u. f. f. = y'$

$P C', R D', S E', u. f. f. = z$

$p C', r D', s E' u. f. f. = z'$

25.

Von selbst folgt nun aus den obigen Grundsätzen:

1) Wenn $y = a$, so ist auch $y' = a$, und wenn $y = 0$, so auch $y' = 0$. Beyde Gesellschaften gehen zu gleicher Zeit ganz aus. §. 23.

2) y' oder die Zahl der Lebenden aus a in der ausgesuchten Gesellschaft kann nie kleiner seyn als y , als die Zahl der zu gleicher Zeit noch übrigen aus a in der gemeinen Gesellschaft, daferne jenes im Anfang größer ist, wegen der geringern Sterblichkeit. Auch kann jenes nicht größer werden, als dieses, wenn es Anfangs kleiner gewesen ist.

Auch kann das Verhältniß $y' : y$ nicht beständig seyn. Denn im Anfange ist $y' = a = y$; und am Ende ist $y' = 0 = y$. In der Zwischenzeit sind beyde verschieden gewesen, oder es hätten beyde Curven ganz zusammen fallen müssen.

Eben so ist auch das *Verhältniß der in gleicher Zeit Abgegangenen* $z' : z$ *veränderlich*. Im Anfang sind beyde diese Zahlen $= 0$; und am Ende beyde $= a$.

So ist auch das Verhältniß der Sterblichkeit in beyden $S' : S$ oder $\frac{\Delta z'}{y'} : \frac{\Delta z}{y}$ *veränderlich*. Am Ende sind beyde einander gleich. Wären sie es immer, so fielen die Curven zusammen. Im Anfang ist $S' : S = \Delta y' : \Delta y$, weil alsdenn $y' = y$ ist.

26.

Die beyden Curven $NP SG$ *und* $Nps G$ *können sich nicht schneiden zwischen den Stellen* N *und* G , *auch nicht zusammenfallen, als in* G . Dies ist hier ein erheblicher Satz, der so erwiesen wird:

Man setze irgendwo zwischen N und G sollen sie sich schneiden z. B. in T und t zusammen, so würde $FT = Ft$, oder $y' = y$ seyn. Soll nun tG unter TG in der Figur fallen, so muß $\Delta y' > \Delta y$ seyn; folglich $\frac{\Delta y'}{y'} > \frac{\Delta y}{y}$; also S' die wirkliche Sterblichkeit größer als die tabellarische S , was gegen den Grundsatz in §. 19. ist.

Sollen die Curven von T an bis G zusammenfallen, so ist zwischen FG , auch $\Delta y' = \Delta y$. Vorher aber war $S' < S$, und $y' > y$. Die Abnahme an dieser Stelle F ist $\Delta y' > \Delta y$. Folglich ist in F das Verhältniß $S' : S = \frac{\Delta y'}{y + \Delta y'} : \frac{\Delta y}{y + \Delta y}$, oder wenn $\Delta y'$

$$\Delta y' = \Delta y + e \text{ gesetzt wird } = \frac{\Delta y + e}{y + \Delta y + e} : \frac{\Delta y}{y + \Delta y}$$

$$= \frac{1 + \frac{e}{\Delta y}}{1 + \frac{e}{y + \Delta y}} : 1, \text{ das ist, weil } \frac{e}{\Delta y} > \frac{e}{y + \Delta y},$$

größer als 1 : 1.

Die *wirkliche* Sterblichkeit hätte also an der Stelle F größer seyn müssen, als die *tabellarische*, was dem Grundsatz zuwider ist.

Wenn die *wirkliche* Sterblichkeit vorher *größer* gewesen ist, als die *tabellarische*, so würde $S' : S$

$$= \frac{\Delta y - e}{y + \Delta y - e} : \frac{\Delta y}{y + \Delta y} = \frac{1 - \frac{e}{\Delta y}}{1 - \frac{e}{y + \Delta y}} : 1 \text{ daselbst}$$

Statt gefunden haben. Aber $1 - \frac{e}{\Delta y}$ ist *kleiner* als

$1 - \frac{e}{y + \Delta y}$. Also hätte S' an dieser Stelle kleiner seyn müssen als S , was wiederum gegen die Natur der Sache ist.

Allein in dem letzten Punkte G, ist $y = 0$. Daselbst

ist also $S' : S = \frac{\Delta y + e}{\Delta y + e} : \frac{\Delta y}{\Delta y}$, wie es seyn soll.

27.

Wenn vorausgesetzt wird, das *Verhältniß der wirklichen Sterblichkeit zur tabellarischen solle sich immer mehr und mehr der Gleichheit nähern*, (nach §. 20.) so folgt auch, daß der *Ueberschuss der Lebenden in der ausgesuchten*

suchten Gesellschaft über den in der gemeinen, oder überhaupt die *Differenz* $y' - y$, wenn sie irgendwo *anfängt abzunehmen*, nachher niemals wiederum so groß werden könne, als sie gewesen ist. Sollte sie auch nachher wiederum wachsen, und von neuen ein *Größtes* werden, so kann sie doch nie wieder so groß werden, als sie das erstemal gewesen ist.

Ist sie nämlich irgendwo, z. E. in D, wo $y' - y = R r = v$, ein *Größtes*, und fängt von da an abzunehmen, so ist nach dem Gesetz der *Continuität* daselbst $d z' = d z$, wo nämlich dies *augenblickliche Decremente* sind. Da ist also $S : S' = \frac{d y}{y} : \frac{d y'}{y'} = y' : y = 1 + \frac{v}{y} : 1$. Wenn nun auch v , welches von da an abnimmt, auch nachher wiederum wächst, und von neuen ein *Größtes* wird, wo man v' dafür schreiben kann, so wird an dieser zwoten Stelle $S : S' = 1 + \frac{v'}{y} : 1$ seyn. Nach der obigen Voraussetzung muß aber $1 + \frac{v'}{y}$ weniger von der Einheit verschieden seyn, als $1 + \frac{v}{y}$, oder $\frac{v'}{y}$ kleiner als $\frac{v}{y}$ seyn. Also da der Divisor y in $\frac{v'}{y}$ kleiner ist, als in $\frac{v}{y}$, auch v' nothwendig kleiner seyn als v .

28.

Noch mehr. Unter eben der Voraussetzung kann die *Differenz* $y' - y$, wenn sie einmal ein *Maximum* gewesen

gewesen ist, und dann abnimmt, nachher nicht wieder zunehmen, und noch einmal ein Maximum werden.

Denn ist sie in D, als R r, ein Maximum, und wiederum ein solches in E, als S s, so ist sie zwischen diesen beyden Stellen ein Minimum gewesen. Im Fall des *Minimi* ist auch $\Delta z' = \Delta z$. Also hat das Verhältniß der wirklichen Sterblichkeit zur tabellarischen in D, H, und E nach §. 27. folgendes gewesen seyn müssen:

$$1 : 1 + \frac{R r}{R D}; \quad 1 : 1 + \frac{I i}{I H}; \quad 1 : 1 + \frac{S s}{S E}.$$

Weil sich aber solches immer mehr der Gleichheit nähern soll, so muß $\frac{R r}{R D} > \frac{I i}{I H}$, und $\frac{I i}{I H} > \frac{S s}{S E}$ seyn. Aber $R D > I H$, folglich $R r > I i$, und $I H > S E$, folglich $I i > S s$. Daher kann I i nicht kleiner als S s gewesen seyn. Also die Differenz kein Minimum gewesen seyn. Folglich kann sie nur einmal ein Größtes seyn.

Es folgt eben dasselbe, wenn man die Differenz verneinend nimmt.

29.

Nun sey überhaupt das Verhältniß zwischen y' und y so ausgedruckt

$$y' = A + B y + C y^2 + D y^3 + \dots$$

Weil $y' = 0$, wenn $y = 0$, so ist $A = 0$.

$$\text{Also } y' = B y + C y^2 + D y^3 + \dots$$

Und weil ferner $y = a$, wenn $y' = a$, so ist auch $a = B a + C a^2 + D a^3 + \dots$

Folglich

Folglich $1 = B + C a + D a^2 + + +$.

Daher $B = 1 - C a - D a^2 - - -$,

und folglich $y' = y - C a y - D a^2 y - - -$
 $+ C y^2 + D y^3 + +$

$$y' - y = C (y^2 - a y) + D (y^3 - a^2 y) + +.$$

30.

In dieser Gleichung muß (nach §. 20.) $r y'$ und $r y$ statt y' und y kommen, wenn $r a$ für a gesetzt wird. Daher kann man für a die Einheit setzen, da denn y ein eigentlicher Bruch ist. Nun auch

$$y' - y = C y (y - 1) + + D y (y^2 - y) + +$$

$$\text{So ist } y' - y = - C y - D y - E y - - - \\ + C y^2 + D y^3 + E y^4 + +.$$

31.

Weil $y' - y$ nur in zween Fällen $= 0$ wird, wenn nämlich $y = a$ und wenn $y = 0$. so hat die Gleichung aus §. 29.

$$0 = C (y^2 - a y) + D (y^3 - a^2 y) + +$$

nur zwei reelle Wurzeln. Und weil $dy' - dy$ nur einmal $= 0$ ist, unter der Voraussetzung im §. 28, so hat die Gleichung

$$0 = 2 C y dy - C a dy + 3 D y^2 dy - a^2 D dy + - +$$

$$\text{und } 0 = 2 C y - C a + 3 D y^2 - a^2 D + -$$

nur Eine reelle Wurzel.

Dieß

Dies leitet auf die *Hypothese*, daß die Coefficienten D , und die folgenden, $= 0$, angenommen werden können. Aber es ist bloß Hypothese.

32.

Das Verhältniß der *wirklichen Sterblichkeit zur tabellarischen* ist im allgemeinen

$$\frac{dz'}{y'} : \frac{dz}{y} = -\frac{dy'}{y'} : -\frac{dy}{y} = \frac{dv'}{y} : \frac{dv}{y}.$$

Nun ist aber aus §. 30.

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{B + 2Cy + 3Dy^2 + \dots}{B + Cy + Dy^2 + \dots} \cdot \frac{dy}{y}, \text{ also}$$

$$S' : S = \frac{B + 2Cy + 3Dy^2 + \dots}{B + Cy + Dy^2 + \dots} : 1, \text{ welches Verhältniß die Gleichheit wird, wenn } y = 0.$$

33.

Es sey also überhaupt

$$S' : S = 1 + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \dots : 1.$$

Wenn die Erfahrungen *hinreichen*, die Coefficienten dieser Reihe zu bestimmen, oder auch die in folgender Reihe:

$$1 + \frac{\mu}{a} \cdot y + \frac{\nu}{a^2} \cdot y^2 + \frac{\pi}{a^3} y^3 + \dots \text{ (weil jene Coefficienten aus demselben Grunde, wie } B, C, D, \text{ nach §. 30. die Potenzen der Anfangszahl } a \text{ zu Divisoren haben müssen, wenn die Zähler beständige und von } a \text{ unabhängige Größen seyn sollen,)} \text{ so würden alsdenn dadurch auch die Coefficienten } B, C, D \text{ u. s. f. gegeben seyn.}$$

Oder

Oder liessen sie sich nur so weit bestimmen, dass die Reihe stark convergirte, so würde auch das genügen. Es kommt nämlich auf μ, ν, π , u. f. f. an, denn

$\frac{y}{a}, \frac{y^2}{a^2}$ u. f. f. sind jedesmal Potenzen von Brüchen.

Da nämlich

$$\frac{B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + \dots}{B + Cy + Dy^2 + Ey^3 + \dots} = 1 + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \dots$$

also

$$B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + \dots = B + B\alpha \left\{ \begin{array}{l} y \\ + C \\ + D \end{array} \right\} + B\beta \left\{ \begin{array}{l} y^2 \\ + C\alpha \\ + D\alpha \end{array} \right\} + B\gamma \left\{ \begin{array}{l} y^3 \\ + C\beta \\ + D\beta \end{array} \right\} + \dots$$

so erhält man

$$\frac{B\alpha + C - 2C = 0}{B\alpha = C},$$

Ferner $B\beta + C\alpha + D - 3D = 0$

$$B\beta + C\alpha = 2D$$

$$\frac{B\beta + B\alpha^2}{2} = \frac{B(\beta + \alpha^2)}{2} = D.$$

$$B\gamma + C\beta + D\alpha + E - 4E = 0$$

$$B\gamma + C\beta + D\alpha = 3E$$

$$B\gamma + B\alpha\beta + \frac{B\beta\alpha + B\alpha^3}{2} = 3E$$

$$B \cdot \frac{(2\gamma + (3\beta + \alpha^2)\alpha)}{2 \cdot 3} = E, \text{ u. f. f.}$$

Daraus wird nach §. 29.

$$y' = By + B\alpha y^2 + B \cdot \frac{(\beta + \alpha^2)}{1 \cdot 2} \cdot y^3$$

$$+ B \cdot \frac{(2\gamma + (3\beta + \alpha^2)\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Und

Und weil (ebendasselbst)

$$B = 1 - B\alpha - \frac{B(\beta + \alpha^2)}{1 \cdot 2} - \frac{B(2\gamma + (3\beta + \alpha^2)\alpha)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots$$

so findet man B durch α, β, γ , u. f. f.

Ich habe aus einigen Erfahrungen die letztern Größen gesucht, aber keine bequeme und stark convergirende Reihe gefunden. Allein ich hatte auch derzeit nur noch wenige Beobachtungen vor mir. Das ist künftig noch weiter zu versuchen.

34.

Wird als *Hypothese* angenommen $S' : S = 1 + by : 1$, wo b negativ ist, wenn die wirkliche Sterblichkeit die kleinere ist, so wird

$$B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 = B + Cy + Dy^2 + Ey^3 + + \\ + Bby + Cby^2 + bDy^3 + +$$

$$\text{Also } \frac{2C}{C} = \frac{C + bB}{bB}$$

$$\text{Ferner } D + Cb = 3D$$

$$D = \frac{b \cdot C}{2} = \frac{B b^2}{2}$$

$$4E = E + bD$$

$$E = \frac{bD}{3} = \frac{Cb^2}{2 \cdot 3} = \frac{B b^3}{2 \cdot 3}, \text{ u. f.}$$

Folglich

$$y' = B \left(y + \frac{b}{1} \cdot y^2 + \frac{b^2}{1 \cdot 2} y^3 + \frac{b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^4 + + \right)$$

II. Theil.

D

Und

Und weil nach §. 29.

$$B = 1 - Bb - \frac{Bb^2}{2} - \frac{Bb^3}{2 \cdot 3} - \dots$$

$$\text{so wird } B = \frac{1}{1 + \frac{b}{1} + \frac{b^2}{1 \cdot 2} + \frac{b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}$$

$= \frac{1}{e^b}$, wo e die Zahl ist, wozu der *Logarithmus naturalis* $= 1$ gehöret.

$$\text{Daher } y' = \frac{1}{e^b} \cdot y \left(1 + \frac{b}{1} y + \frac{b^2}{1 \cdot 2} y^2 + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{e^b} \cdot e^{by} \cdot y = y \cdot e^{(y-1)b}$$

35.

Eine *zweite Hypothese* ist die, deren schon oben erwähnt ist §. 31. Sie ist leichter, und die einfachste, auch hier zu meiner Absicht die bequemste. Darum erkläre ich sie nicht für die richtigste, oder am nächsten zutreffende mit den Beobachtungen. Man nimmt nämlich an, es sey $y' = By + Cy^2$.

36.

Daraus findet man auch das allgemeine *Verhältniß der Sterblichkeit* auf folgende Art.

Es ist nach §. 32.

$$B + 2Cy = B + B\alpha \} y + B\beta \} y^2 + B\gamma \} y^3 + \dots \\ + C \} + C\alpha \} + C\beta \}$$

Weil nun $D = 0$, $E = 0$, u. s. f., so wird

$$\frac{B\alpha + C - 2C}{B\alpha} = 0$$

Nun

$$\begin{aligned} \text{Nun auch } B\beta + C\alpha &= 0 \\ \frac{B\beta + B\alpha^2}{\beta} &= 0 \\ \beta &= -\alpha^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner } B\gamma + C\beta &= 0 \\ \frac{B\gamma + B\alpha\beta}{\gamma} &= 0 \\ \gamma &= -\alpha\beta = +\alpha^3, \text{ u. f. f.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Daraus wird } S' : S &= 1 + \alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \dots : 1. \\ &= 1 + \alpha y - \alpha^2 y^2 + \alpha^3 y^3 - \dots = 1 + \frac{\alpha y}{1 + \alpha y} = \frac{1 + 2\alpha y}{1 + \alpha y}. \end{aligned}$$

$$\text{Weil } \alpha = \frac{C}{B}, \text{ und } B = 1 - C,$$

$$\text{so wird } \alpha = \frac{C}{1 - C}.$$

37.

Ist die wirkliche Sterblichkeit *kleiner* als die tabellarische, so ist C eine *negative Grösse*, und zugleich ein *eigentlicher Bruch*. Denn weil

$$y' - y = Cy(y - a), \text{ so ist}$$

$$C = \frac{y' - y}{y(y - a)}.$$

Nun ist $y' > y$ und $y < a$, folglich der Zähler *bejahend*, und der Nenner *verneinend*.

$$\text{Also } C = -\frac{y' - y}{(a - y)y}, \text{ also eine negative Grösse.}$$

Ferner C muss eine *beständige* Grösse seyn, aber nur in Beziehung auf a , und abhängig von a . Es muss so genommen werden, dass im Fall statt a , die Anfangszahl $m a$ wird, also auch statt y' , y , die Zahlen $m y'$, $m y$ gesetzt werden, dennoch die Gleichung $C = -\frac{y' - y}{(a - y)y}$

D a

statt

statt finde. Aber wenn diese Substitution geschieht, so bekommt man

$$M = - \frac{m(y' - y)}{m^2(a - y)} = - \frac{y' - y}{m(a - y)}; \text{ in diesem Fall}$$

mufs also $M = - \frac{C}{m}$ werden. Daher ist C eine solche

Gröfse, welche a im Divisor haben mufs, wenn der Zähler bey jeder Anfangszahl derselbe bleiben soll. Man

schreibe also $C = - \frac{n}{a}$ wo $\frac{n}{a}$ positiv ist, so wird

$$\frac{n}{a} = \frac{y' - y}{(a - y)y}.$$

Nun ist y eine ganze Zahl, wenn a eine ganze Zahl ist, von der gehörigen Gröfse, und man kann sie so grofs nehmen, als man will. Auch ist $y' - y < a - y$, weil y' immer kleiner als a , doch gröfser als y ist. Also auch $(a - y)y > y' - y$. Daher auch in diesem Fall $- \frac{n}{a} = C$ jedesmal ein *eigentlicher Bruch* ist.

38.

Wenn $a = 1$; so ist $C = -n$. Also in §. 36;

$\alpha = - \frac{n}{1 + n}$, und dann ist auch y ein *eigentlicher*

Bruch. Das Verhältnifs $S' : S = 1 + \alpha y - \alpha^2 y^2 + \dots : 1$

$$= 1 + \frac{\alpha y}{1 + \alpha y} : 1 = 1 + 2\alpha y : 1 + \alpha y = n + 1 - 2ny :$$

$n + 1 - ny$. Wenn $y = 0$, so ist dies Verhältnifs die

Gleichheit, aber im Anfang, wenn $y = 1$, wird solches

$$= 1 - n : 1.$$

Hier

Hier ist die Anfangszahl $a = 1$; wird sie aber bey-
behalten wie sie in den vorkommenden Fällen ist, so
kommt anstatt y , der Bruch $\frac{y}{a}$.

Nun ist aber nach der Natur der Sache nicht möglich,
weder dafs $1 - n = 0$, noch dafs es verneinend sey.
Die *wirkliche* Sterblichkeit kann in Vergleichung mit der
tabellarischen nicht verschwinden, oder, wenn man dieß
auch für den ersten Anfang der Gesellschaft annehmen
wollte, doch nicht *verneinend* seyn. Folglich muß n ,
welches positiv ist nach §. 37, auch zugleich ein *eigentli-
cher Bruch* seyn. Also auch, weil $n = \frac{a(y' - y)}{(a - y)y}$ (§. 37.)
 $= \frac{a}{a - y} \cdot \frac{y' - y}{y}$, der Factor $\frac{y' - y}{y} = \frac{y'}{y} - 1$
kleiner als die Einheit seyn, und y' kleiner als $2y$. Auch
ist $n \cdot \frac{a - y}{a} = \frac{y' - y}{y}$, also weil n ein eigentlicher
Bruch ist, $\frac{y'}{y} - 1$ kleiner als $1 - \frac{y}{a}$. Dieß ist eine
Folge der im §. 31. angenommenen *Hypothese*, und
zwar bey solchen Gesellschaften, worin die Sterblichkeit
kleiner ist, als die gemeine. Sie schließt die Fälle aus,
in denen y' zweymal so groß wird als y nach den Tabel-
len. Das ist ein Beweis, dafs sie nicht allgemein genug
ist; aber kein Beweis, dafs sie nicht für die wirkliche
Erfahrung allgemein genug sey.

39.

Wenn die *wirkliche* Sterblichkeit gröfser ist, als die *tabellarische*, so ist $C = \frac{y - y'}{(a - y)y}$ *positiv*, weil hier $y > y'$ ist, folglich auch $C = n$ *positiv*, für $a = 1$. §. 37.

Daher $\alpha = \frac{n}{1 - n}$, und $\alpha y = \frac{n}{1 - n} \cdot y$, und

$S' : S = 1 + \alpha y - \alpha^2 y^2 + \alpha^3 y^3 - +$ in infinitum,

$$= 1 + \frac{\left(\frac{n}{1 - n} y \right)^\infty}{\frac{n}{1 - n} y - 1}.$$

Allein weil die *wirkliche* Sterblichkeit nicht unendlich vielmal gröfser seyn kann als die *tabellarische*, so mufs auch hier αy ein eigentlicher Bruch seyn. Dann wird

$$S' : S = 1 + \frac{\frac{n}{1 - n} \cdot y}{\frac{n}{1 - n} y + 1} : 1 = \frac{1 - n + 2ny}{1 - n + ny} : 1$$

$= 2ny + 1 - n : ny + 1 - n$. Das ist, beyde sind gleich, wenn $y = 0$, und wenn $y = 1$, so ist $S' : S = n + 1 : 1$.

40.

Wo die Differenz $y' - y$ ein *Größtes* ist, da wird d. $(y - a)y = 0$, §. 33. also $2y dy = a dy$, und $y = \frac{1}{2}a$; das ist, wo die Hälfte der anfänglichen Zahl noch übrig ist, die Hälfte also verstorben ist, oder, nach Ablauf des *wahrscheinlichen Alters*.

41.

Es kommt also darauf an, ob die Erfahrung die Gröſſe $n = a \cdot \frac{y' - y}{(a - y)y} = a \cdot \frac{(z - z')}{(a - z)z}$, (weil $a - y = z$, und $y' - y = z - z'$), als *beſtändig*, oder doch *nahe ſo* angebe. Wenn das letzte nur Statt findet, und zwar im Durchschnitt, ſo kann man den gefundenen Werth von n mit eben ſo vieler Zuverläſſigkeit zum Grunde legen, und darnach rechnen, als man die Mortalitäts-Tafeln gebraucht.

Iſt das Verhältniß der *wirklich Geſtorbenen zu den Erwarteten* gegeben, ſo ſey $z' = \nu z$. Dieſs Verhältniß iſt aber veränderlich, nachdem die Zeit, worinn ſie geſtorben ſind, und alſo z , oder die Zahl der Todten nach den Tabellen ſich ändert. Alsdenn bekommt man

$$n = a \cdot \frac{1 - \nu}{a - z} = \frac{1 - \nu}{y : a}.$$

42.

Da n eine *beſtändige* Gröſſe iſt, wenigſtens ſeyn ſoll nach der Hypotheſe, und zwar ſo eine, welche im Durchschnitt als die richtige genommen werden kann, ſo läßt ſie ſich erhalten, wenn aus mehrern einzelnen Werthen von ihr der Mittelwerth geſucht wird. Dagegen iſt ν , das *Verhältniß der wirklichen Todten zu den berechneten* veränderlich ſo wohl, wenn das *Alter* der Perſonen, als wenn die *Zeit des Abſterbens* verſchieden iſt.

Das Verfahren ist also mißlich, wenn v als von derselben GröÙe angenommen wird, in den Beyspielen, woraus man die Werthe von n sucht, sobald entweder das Alter oder die Zeit nicht dieselben sind. Man kann und muß in dieser Materie die Sachen im Durchschnitt rechnen, im Bausch und Bogen; aber doch mit Vorsichtigkeit. Einzelne Beobachtungen in kleinen Zahlen, z. B. die Fälle, wo gar keiner aus der anfänglichen Zahl in einer Zeit gestorben ist, können so allein zu nichts gebraucht werden. Es sind nicht einzelne Fälle, es sind Haufen von Fällen, die uns hier als Beobachtungen dienen, denn man sucht nicht *allgemeine* GröÙen, sondern *Mittel-GröÙen*. Allein diese Sammlungen von Fällen müssen gleichartige Fälle enthalten. Wenn das Absterben der ersten 1270 Ehefrauen bey der Calenbergischen Gesellschaft von halben Jahr zu halben Jahr, oder nur von Jahr zu Jahr verzeichnet würde, so könnten über 300 Werthe von n daraus berechnet werden, so daß ein Mittel aus ihnen als die Normal-GröÙe bey Ehefrauen in einem Wittwen-Institut, wenigstens in Deutschland, angenommen werden könnte. Und diese Zahl würde wie ich glaube, gleiche und wohl gröÙere Zuverlässigkeit haben, als irgend eine unserer besten Mortalitäts-Tafeln. Ein Gebrauch, der wichtig genug ist, um solche Verzeichnisse zu wünschen.

Ich glaube indessen, man könne mit den obigen Erfahrungen schon ziemlich weit kommen. Zuerst sondere
man

man diejenigen Fälle ab, wo die Zahl der Personen nahe an 30 und darüber ist, das Alter der Personen gleich ist, oder doch in demselben Quinquennio steht, und die Zeit des Absterbens dieselbe ist. Der mittlere Werth aus diesen Werthen von n wird der Wahrheit nahe kommen. Nachher kann man auch die von *gleichem Alter*, obgleich die *Zeit* verschieden ist, und dann die, bey denen die *Zeit* dieselbe, das Alter aber verschieden ist, zu Hülfe nehmen. Treffen die letztern Resultate mit den ersten zusammen, so sind es bestätigende Gründe, so ferne sie aber abweichen, können sie an Gültigkeit den erstern nicht gleich gesetzt werden.

43.

1) Bey Personen vom Alter 20 - 25 Jahr beym Eintritt, wird

aus Tafel,	der Werth von v ;	und der von n .
1	1, 37 Es sind mehr gestorben als erwartet worden.	— 0, 457
7	0, 44	+ 0, 959
10	0, 60	+ 0, 384
12	0, 00	+ 1, 127
13	1, 20	— 0, 224
18	0, 60	+ 0, 626

Der mittlere Werth von n hieraus ist $= \frac{2, 105}{6} = 0, 35$

2) Alter 25 — 30 Jahr.

aus Taf.	ν .	n .	aus Taf.	ν .	n .
1	0,65	+ 0,44	15	1,12	— 0,136
2	1,10	— 0,127	16	1,82	— 0,918
3	1,00	0,00	17	1,00	0,000
5	1,64	— 0,807	18	0,00	+ 1,097
7	0,56	+ 0,532	19	1,22	— 0,245
8	0,84	+ 0,193	20	0,46	+ 0,586
9	0,61	+ 0,474	21	0,00	+ 1,076
10	0,50	+ 0,588	22	0,00	+ 1,068
11	0,31	+ 0,817	23	0,00	+ 1,079
12	1,25	— 0,281			
13	1,31	— 0,357			

Der mittlere Werth hieraus ist $= \frac{5,079}{20} = 0,254$

3) Das Alter 30 — 35 Jahr.

aus Taf.	ν .	n .	aus Taf.	ν .	n .
1	0,66	+ 0,451	13	1,37	— 0,434
2	0,94	+ 0,080	14	0,43	+ 0,672
6	0,79	+ 0,266	16	0,54	+ 0,531
7	0,86	+ 0,177	17	0,35	+ 0,739
8	0,86	+ 0,174	18	0,27	+ 0,848
9	1,35	— 0,448	19	0,67	+ 0,367
10	1,14	— 0,145	20	1,27	— 0,297
11	1,02	— 0,025	23	0,5	+ 0,535
12	1,54	— 0,644			

Hieraus das Mittel $= + \frac{2,847}{17} = 0,17$.

4) Das

4) Das Alter 35 — 40 Jahr.

aus Taf.	ν .	n .	aus Taf.	ν .	n .
1	0,71	0,557	11	0,91	0,112
5	0,47	0,680	13	1,11	— 0,132
7	0,40	0,782	21	0,42	0,642
8	0,92	0,103	22	0,46	0,592
9	0,64	0,843	23	0,00	1,085
10	0,48	0,650	26	1,43	— 0,455

Das Mittel ist $= + \frac{5,459}{12} = 0,455.$

5) Alter 40 — 45 Jahr.

Hier sind schon Beyspiele mitgenommen, wo die Zahl der Personen nur gegen 20 gewesen ist. Es fehlte an andern.

aus Taf.	ν .	n .	aus Taf.	ν .	n .
1	0,60	0,626	8	0,95	0,069
2	0,55	0,562	9	0,32	0,960
3	0,42	0,876	10	0,59	0,541
4	0,70	0,439	18	0,42	0,682
6	0,81	0,270	20	0,44	0,642
7	0,44	0,781			

Das Mittel hieraus ist, $n = + \frac{6,448}{11} = 0,586.$

6) Alter

6) *Alter von 45 — 50 Jahr.*

Hier sind Fälle mitgenommen, wo die Zahl der Personen nur 9 bis 10 und darüber gewesen ist

aus Taf.	ν .	n .	aus Taf.	ν .	n .
1	0,66	0,594	8	0,00	1,550
2	0,68	0,543	9	0,24	1,100
3	0,21	1,240	10	0,66	0,486
4	0,22	1,265	11	0,48	0,673
6	0,65	0,542	12	0,34	0,896
7	0,34	1,009			

Das Mittel hieraus für n ist $= \frac{9,899}{11} = 0,9$.

7) *Alter von 50 — 60 Jahr.*

Aus Taf. 1. ist $\nu = 0,71$; $n = 0,649$;

— — 2. — $\nu = 0,36$; $n = 0,936$;

— — 3. — $\nu = 1,13$; $n = 0,264$;

— — 5. — $\nu = 0,6$; $n = 0,800$.

Dies gibt zum mittlern Werth $n = + \frac{2,121}{4} = 0,53$.

44.

Der *mittlere Werth von n aus allen diesen berechneten 81 Fällen* ist $= 0,42$.

Sondert man aber die vom Alter bis 35 Jahr, von den ältern ab, weil der Unterschied in jeder Classe besonders, merklich ist, so wird

für die *unter 35 jährigen*, $n = 0,23$.

für die *über 35 jährigen*, $n = 0,63$.

Theilet man sie dagegen ab in *45 jährige*, und *darunter*, und in *ältere*, so wird n für jene $= 0,33$, und für diese $= 0,8$.

Es

Es verdienet hiebey das bemerket zu werden. Da der mittlere Werth von n nirgends so groß ist, als die Einheit, (denn von einzelnen Fällen ist die Frage nicht, und auch diese kommen wenig vor,) so empfiehlt sich dadurch die obige Hypothese (nach §. 37.) als eine solche, die den Erfahrungen anpassend ist.

45.

Mit den gefundenen Werthen von n vergleiche man nun noch diejenigen, welche man findet, wenn der Unterschied am Alter, oder an der Zeit des Absterbens, oder auch beydes bey Seite gesetzt wird. Ich habe oben schon erinnert, diese Resultate können nur zur Prüfung dienen, sie sind nicht so zuverlässig, als die vorhergehenden.

Man nehme also alle zusammen, die in Einer der obigen Tabellen vorkommen, so erhält man folgende Werthe von n

Taf.	n.	T.	n.	T.	n.
1	0, 454	11	0, 365	21	0, 295
2	0, 381	12	0, 214	22	0, 542
3	0, 353	13	— 0, 047	23	0, 863
4	0, 270	14	0, 555	24	— 0, 131
5	0, 359	15	0, 299	25	0, 880
6	0, 388	16	0, 457	26	0, 502
7	0, 567	17	0, 115	27	0, 332
8	0, 162	18	0, 649	28	— 0, 103
9	0, 366	19	0, 400		
10	0, 368	20	0, 507		

Der mittlere Werth aus diesen 28 ist $n = \frac{0,362}{28} = 0,37$

46. Die

46.

Die Werthe von n , wenn auf die Verschiedenheit der Zeit des Absterbens nicht gesehen, das Alter beym Anfang aber bey allen gleich gesetzt wird, sind folgende.

Alter		n .		Alter		n .
15—20		0,088		40—45		0,598
20—25		— 0,089		45—50		0,718
25—30		0,243		50—55		0,537
30—35		0,217		55—60		0,528
35—40		0,429		60—70 +		0,817

Hier muß aber noch für die weggelassenen nach §. 10. hinzugesetzt werden ein Werth von $n = 0,5$.

Das Mittel aus diesen 11 Werthen ist

$$= \frac{3,986}{11} = 0,362.$$

Sondert man die *unter 35 jährigen* ab von den *ältern*; so ist n für die *erstern*, wenn man die Hälfte von den weggelassenen nur dahin rechnet; $= 0,128$.

Für die *letztern* ist solches $= 0,541$.

Theilet man sie in die *unter 45 jährigen*, und in die *ältern*, so ist n für jene $= 0,25$;

für diese $= 0,63$.

47.

Endlich noch alle zusammen genommen als ein Haufen von gleichem Alter beym im Anfang, und in gleicher Zeit abgestorbenen, (nach den Zahlen in §. 7.) so ist $n = 0,375$.

48. Als

48.

Als ein Resultat aus diesen glaube ich annehmen zu können, es lasse sich für Ehefrauen, deren Männer in Wittwencassen einsetzen, im Durchschnitt annehmen

$$n = 0,4.$$

Für die unter 35 jährigen insonderheit aber $= 0,2$, und für die über 35 jährigen $n = 0,6$.

Oder auch für alle unter 45 jährige insonderheit

$$= 0,3$$

für alle ältere $= 0,8$.

49.

Für den Werth von n bey den Ehemännern ist nur die eine Tabelle 31. (§. 11.) da, welche aber ohne in Verbindung mit der 32sten nicht gebraucht werden kann.

Die Werthe von n , welche daraus folgen, sind diese:

Alter		n		Alter		n
20—30		0,382		50—55		0,145
30—35		0,355		55—60		—0,061
35—40		0,498		60—65		—0,064
40—45		0,416		65—70		0,386
45—50		0,133		70—75		0,48

Der mittlere Werth aus allen ist, $n = 0,27$.

Für die unter 45 jährigen insonderheit wird $n = 0,41$.

Für die ältern $= 0,17$.

Das Mittel bey den Frauen in §. 44. war $n = 0,42$.

Nimmt man aus diesem und dem gegenwärtigen $n = 0,27$,
von

von neuen das Mittel, so wird $n = 0,34$. Dies kann als das Mittel für beyde Geschlechter vermisch angenommen werden.

Das Alter ist aber hier das Eintritts-Alter. Der gefundene Werth gehört noch zu den vorhergehenden.

Die folgenden Tabellen geben solche Werthe nicht, weil man das Alter nicht hat, worinnen die Personen eingetreten sind, sondern nur dasjenige, in welchem ihr Absterben erfolgt ist.

50.

Aus der 33sten Tafel erhält man einen Werth von $n = 0,307$. Diesen kann man noch den obigen zuzählen. Allein die aus der 34. 35 und 36sten Tafel sind eigentlich nicht damit zu vergleichen, weil es hier nicht das Alter beym Eintritt ist, aus dem der Abgang berechnet wird. Nehmen wirs indessen so an, so erhält man folgende Werthe:

1) Aus der 34sten Tafel $n = 0,506$.

In dem obigen Ausdruck $n = \frac{1-v}{y:a}$, kann $a = 1$ gesetzt werden. Dann muß aber $\frac{z}{a}$ aus der Mortalitäts-Tafel gesucht werden, nach der man die erwarteten Todten berechnet hat.

2) Die Werthe von n aus der 35 und 36sten Tafel sind folgende. Es waren die Einsätze der Interessenten der

der Gesellschaft nach der Londoner Mortalitäts - Tabelle des *Simpsons* berechnet. Auch ausserdem bestund wohl der grösste Theil derselben aus Personen, die in London wohnten. Daher auch ohne Zweifel die Londoner Tabelle hier als die gemeine anzusehen ist.

Aus der 35sten Tafel.			Aus der 36sten Tafel.	
Alter	Werthe von n in Beziehung auf		n in Beziehung auf	
	die Lon- doner	auf Süsm. Tafel.	die Lon- doner T.	auf die Süs- milch. Tafel.
10—20	— —	— —	0, 240	— 0, 146
20—30	0, 715	0, 425	0, 751	+ 0, 294
30—40	0, 530	0, 060	0, 828	+ 0, 302
40—50	0, 710	— 0, 076	0, 649	+ 0, 057
50—60	0, 546	+ 0, 200	0, 623	+ 0, 240
60—70	0, 518	— 0, 087	0, 035	— 0, 142
20—70	0, 428	+ 0, 182		

Nimmt man den mittlern Werth aus den Zahlen für die ganze Gesellschaft auf einmal, und zwar aus den Tafeln 34 und 35, wo man solche hat, so ist aus diesen beyden Fällen $n = 0, 34$ in Hinsicht auf *Halley's*, oder was hier einerley ist, *Süsmilch's* Tafel.

Der mittlere Werth aus den eilf einzelnen Fällen in Taf. 34 und 35. ist in Beziehung auf die Süsmilchische Tabelle nur $= 0, 102$.

Dagegen in Beziehung auf die Londoner $= 0, 464$.

51.

Die Mortalitäts-Tabelle des *Deparcieux* kann aus vorgedachten Gründen nicht hieher gezogen werden. Will man sie so ansehen, als wenn die *Neugebohrnen* alle zugleich als ausgesuchte Kinder in die Gesellschaft gebracht worden, und dann den Werth von n , in Beziehung auf die Süßmilchische Tabelle, in so vielen einzelnen Fällen berechnen, so findet sich der mittlere Werth nahe genug so groß, als oben aus den Calenbergischen Erfahrungen in §. 48; nämlich 0, 4. Allein wenn man von einer andern Zahl der Lebenden anfängt, so zeigt sich, was auch in jenen Exempeln sich findet, daß in den höhern Jahren die Zahl der Verstorbenen nach *Deparcieux* sich nicht genug der Zahl nach *Süßmilch* nähert, um n niemals größer werden zu lassen als die Einheit. Und da diese Gröſse in den meisten Beyspielen immer wächst, je länger die Zeit des Absterbens genommen wird, so würde diese Tabelle mehr der Hypothese entgegen als mit ihr übereinstimmend seyn, wenn jene ihrer Natur nach auf eine solche Tabelle so gebraucht, anpassend seyn müßte. Das soll sie aber nicht. Es soll die Gröſse n nur unter der Bedingung beständig seyn, daß v das Verhältniß der wirklich Gestorbenen zu den tabellarischen ausdrückt, aus denselben Personen von gleichem Alter bey dem Anfang der Gesellschaft nach derselben Zeit. Es ist ein anders wenn die von gleichem Alter in der Gesellschaft schon sehr verschiedene

schiedene Jahre darinn gewesen sind. Die Tafel des *Deparcieux* giebt die Zahl y bey dem höhern Alter zu klein an. Das heist nicht, sie giebt die *Sterblichkeit* zu klein an. Die Sterblichkeit kann überhaupt in der ausgesuchten Gesellschaft so geringe seyn als man will, demohngeachtet kann n eine beständige Grösse bleiben. Es kommt nur darauf an, daß die Sterblichkeit sich der tabellarischen nähere, nicht aber sich von dieser entferne. So findet mans nicht, wenn die Tabelle des *Deparcieux*, als von einer ausgesuchten Gesellschaft, mit der Süßmilchischen, als von der allgemeinen Gesellschaft, verglichen wird.

52.

Ist der Werth von n ausgemacht, so findet aus §. 40. die Gleichung statt.

$$y' = (n+1)y - \frac{n y^2}{a}.$$

Daraus kann eine Tabelle für die *Wahrscheinlichkeit des Lebens einer jetzo gesunden Person von einem bestimmten Alter* gemacht werden. Aber die Zahl der Lebenden, y' , hängt in Hinsicht ihres letzten Theils $\frac{n y^2}{a}$, von der Anfangszahl a , ab. Daher läßt sich dieselbe Tabelle nicht für Personen von einem andern Alter gebrauchen, ohne sie gehörig abzuändern. So eine allgemeine Mortalitäts-Tafel, als des *Deparcieux* seine ist, kann hiebey nicht statt finden.

Dritter Abschnitt.

Von dem Einfluss, den die Abweichung der Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften auf die Werthe der Leibrenten und Wittwenpensionen hat.

53.

Aufgabe 1. Aus dem Werth einer Leibrente nach den Tabellen, den Werth derselben zu finden nach der wirklichen Sterblichkeit.

Der Werth der Leibrente für das Alter a sey $\lambda \overline{a}$; der Werth der Verbindungsrente für zwei Personen vom Alter a , wiederum $\lambda \overline{a a}$. Der Werth der Leibrente nach der wirklichen Sterblichkeit sey $\lambda' \overline{a}$, von jenem Ausdruck durch den oben zur rechten Hand angesetzten Strich unterschieden.

Es sey n wiederum die beständige vorher gesuchte Grösse in der Gleichung $y' = (n+1)y - n \frac{y^2}{a}$, worin a die Zahl der Lebenden nach den Tabellen im Alter a ist, welche in der *Einleitung* sonst durch A bezeichnet ist. Alsdenn ist $\lambda' \overline{a} = \lambda \overline{a} + n. (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{a a})$.

Dies wird leicht so eingesehen.

$$\text{Da } \lambda \overline{a} = \frac{1}{A} \left(\frac{^1A}{r} + \frac{^2A}{r^2} + + \frac{^x A}{r^x} \right) \quad (\text{Einleit.}$$

Cap. 2. v. Leibrent. §. 39.), wo $^1A, ^2A$, die Zahlen der Lebenden in den Tabellen sind, welche im Allgemeinen durch y in der obigen Gleichung bezeichnet werden, so

so setze man statt jeder derselben den Werth der zugehörigen Zahl y' . Alsdenn ist

$$\lambda' \overline{a} = \frac{1}{A} \left(\frac{(n+1) \overline{A}}{r} + \frac{(n+1) \overline{A}^2}{r^2} + + + \right) \\ - \frac{1}{A} \left(\frac{n \overline{A} \cdot \overline{A}}{A \cdot r} + \frac{n \cdot \overline{A}^2 \cdot \overline{A}}{A \cdot r^2} + + \right)$$

$$= (n+1) \lambda \overline{a} - n \lambda \overline{a a}. \quad (\text{Einleit. §. 39. und §. 126.})$$

$$= \lambda \overline{a} + n (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{a a}).$$

54.

Ex. 1. Es sey das Alter 35 Jahr, und $n = 0,4$. nach §. 48, so ist, nach dem 4 pro Cent-Fuß $\lambda \overline{a} = 14,1175$ (Tab. XVI.) und $\lambda \overline{a} - \lambda \overline{a a} = 3,2599$. (Tab. XXVII.) Daher $\lambda' \overline{a} = 14,1175 + 1,3040 = 15,4215$. Der Ueberschuß von $\lambda' \overline{a}$ über $\lambda \overline{a}$ beträgt, in Procenten berechnet, nahe an 10 Procent der tabellarischen Rente mehr, oder auf jede jährliche Hebung von 10, nahe an 13 mehr.

Wird $n = 0,3$ gesetzt, so ist $n (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{a a}) = 0,9779$, und $\lambda' \overline{a} = 15,0954$. Der Unterschied ist nahe an 7 Procent des tabellarischen baaren Werths der Rente, und auf jede der jährlichen Hebungen 10, um 9,8 mehr.

Ex. 2. Es sey das Alter 45 Jahr, so ist nach demselben Zinsfuß $\lambda \overline{a} = 12,0108$ und $\lambda \overline{a} - \lambda \overline{a a} = 3,1745$. Daher wird $\lambda' \overline{a}$, (wenn $n = 0,4$), $= 12,0108 + 1,2698 = 13,2806$, das ist, um nahe an 10¹ p. C. mehr als $\lambda \overline{a}$,

oder auf jede jährliche Hebung von 10, nahe an 12, 7 mehr.

Wenn $n = 0,3$, wird $\lambda'_{45} = 12,0108 + 0,9523 = 12,9631$, das ist nahe 8 p. C. mehr.

55.

Zusatz 1. Weil $\lambda_{\overline{a}} - \lambda_{\overline{a}a}$, der Werth der Rente auf das Ueberleben einer Person über eine andere von gleichem Alter, immer einigen positiven Werth hat, wenn n positiv ist, so ist in jedem Fall, die Leibrente nach der wirklichen Sterblichkeit grösser als nach der tabellarischen, und dieser Unterschied ist nicht unerheblich. Dieser nimmt zu (nach der XXVIIsten Tabelle) vom 15 bis 35sten Jahr, an sich, und auch im Verhältniß gegen die tabellarische Rente selbst. Von da an nimmt der Unterschied an sich ab, allein in Verhältniß auf die gewöhnliche tabellarische Leibrente, also in Procenten nach dieser letztern berechnet, wird er bey dem höhern Alter immer grösser.

56.

Zusatz 2. Nimmt man statt der Werthe der Renten die Grössen für die mittlere *Dauer* des einfachen Lebens und des Zusammenlebens, so erhält man auf dieselbe Art in ähnlichen Ausdrücken, auch die *mittlere Lebensdauer* nach der wirklichen Sterblichkeit, oder

$$E'_{\overline{a}} = E_{\overline{a}} + n. (E_{\overline{a}} - C_{\overline{a}a}),$$

wo $E \overline{a}$ die Dauer des einzelnen Lebens nach den Tabellen, und $C \overline{a a}$ die Verbindungsdauer ist. Dasselbige läßt sich bey allen folgenden Aufgaben erinnern. Darum ist es überflüssig, dieselbigen Sätze für die Dauer noch besonders auszudrücken.

57.

Aufgabe 2. Den Werth der Verbindungs-Rente von zwei Personen nach der wirklichen Sterblichkeit zu finden.

Wenn die Zahl n bey beyden Personen dieselbige ist, das ist, die wirkliche Sterblichkeit bey beyden Personen nach derselben Gleichung von der tabellarischen abweicht.

Auflösung. In diesem Fall ist ($\lambda' \overline{ab}$ für das Zeichen der wirklichen Verbindungsrente genommen),

$$\lambda' \overline{ab} = (1+n)^2 \cdot \lambda \overline{ab} - n \cdot (n+1) \lambda \overline{aa.b} \\ - n \cdot (n+1) \lambda \overline{abb} + n n \lambda \overline{aa.bb}.$$

Beweis. In einem allgemeinen Gliede der Reihe

$$\text{für } \lambda \overline{ab} = \frac{1}{A B} \cdot \left(\frac{\overline{A}^1 \overline{B}^1}{r} + + \frac{\overline{A}^x \overline{B}^x}{r^x} \right)$$

(§. 126. der *Einl.*) setze man statt $\overline{A}^x$, aus der obigen

Gleichung, $(n+1) \overline{A}^x - n \frac{\overline{A}^{x+1}}{\overline{A}}$, und statt $\overline{B}^x$, eben-

falls $(n+1) \overline{B}^x - n \frac{\overline{B}^{x+1}}{\overline{B}}$, so erhält man für ein unbe-

stimmtes Jahr x , anstatt $\frac{{}^x A \cdot {}^x B}{A \cdot B \cdot r^x}$, folgendes:

$$\frac{(n+1)^2 \cdot {}^x A \cdot {}^x B}{A B r^x} - n \cdot (n+1) \frac{({}^x A)^2 ({}^x B)}{A A \cdot B \cdot r^x} \\ - n \cdot (n+1) \frac{{}^x A ({}^x B)^2}{A \cdot B B \cdot r^x} + n^2 \cdot \frac{({}^x A)^2 ({}^x B)^2}{A A \cdot B B \cdot r^x}.$$

Diese Theile aus allen Jahren zusammen genommen, geben folgende Verbindungsrenten:

$$\frac{(n+1)^2}{A B} \cdot \left(\frac{{}^1 A \cdot {}^1 B}{r} + \frac{{}^2 A \cdot {}^2 B}{r^2} + + \frac{{}^x A \cdot {}^x B}{r^x} \right) = \\ (n+1)^2 \cdot \lambda \overline{a b}.$$

$$- \frac{n \cdot (n+1)}{A A \cdot B} \cdot \left(\frac{{}^1 A \cdot {}^1 A \cdot {}^1 B}{r^1} + \frac{{}^2 A \cdot {}^2 A \cdot {}^2 B}{r^2} + + \frac{{}^x A \cdot {}^x A \cdot {}^x B}{r^x} \right) = - n \cdot (n+1) \lambda \overline{a a b}, \text{ für drey Per-} \\ \text{sonen (§. 150. Einleit.)}$$

$$- \frac{n \cdot (n+1)}{A \cdot B B} \cdot \left(\frac{{}^1 A \cdot {}^1 B \cdot {}^1 B}{r} + \frac{{}^2 A \cdot {}^2 B \cdot {}^2 B}{r^2} + + \frac{{}^x A \cdot {}^x B \cdot {}^x B}{r^x} \right) = - n \cdot (n+1) \lambda \overline{a b b}. \text{ Und}$$

$$+ \frac{n^2}{A A \cdot B B} \cdot \left(\frac{{}^1 A \cdot {}^1 A \cdot {}^1 B \cdot {}^1 B}{r} + \frac{{}^2 A \cdot {}^2 A \cdot {}^2 B \cdot {}^2 B}{r^2} + + \frac{{}^x A \cdot {}^x A \cdot {}^x B \cdot {}^x B}{r^x} \right) = + n^2 \cdot \lambda \overline{a a \cdot b b}$$

das ist eine Rente für vier verbundene Personen, Folglich
 $\lambda' \overline{a b}$

$$\lambda' \overline{ab} = (n+1)^2 \lambda \overline{ab} - n \cdot (n+1) \lambda \overline{aab} - n \cdot (n+1) \lambda \overline{abb} + n^2 \cdot \lambda \overline{aabb}.$$

58.

Zusatz 1. Daraus wird auch

$$\begin{aligned} \lambda' \overline{ab} &= \lambda \overline{ab} + n^2 (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab}) \\ &+ n (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aabb}) + n (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb}) \\ &- n^2 (\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aabb}), \\ &= \lambda \overline{ab} + n \cdot (n+1) (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab}) \\ &+ n (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb}) - n^2 (\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aabb}). \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck sind die folgenden Glieder lauter Renten auf die Ueberdauer einer Verbindung von einer gewissen Zahl von Personen, nachdem die Verbindung aus diesen und noch einer Person mehr aufgehöret hat. Es sind lauter positive Grössen.

59.

Zusatz 2. Wenn die Verbindungsrente $\lambda \overline{ab}$ angesehen wird als eine einfache Leibrente für das Mittelalter m , also $\lambda \overline{ab} = \lambda \overline{m}$, so kann die Verbindungsrente für drey Personen als eine für zwo, (nach *Einleit.* §. 162.) das ist, $\lambda \overline{a. ab} = \lambda \overline{am}$ ohne erheblichen Fehler angenommen werden.

Ferner, wenn $\lambda \overline{abb} = \lambda \overline{\mu}$, das ist, einer einfachen Leibrente für das Alter μ , so kann $\lambda \overline{a. abb} = \lambda \overline{a\mu}$ gesetzt werden.

Alsdenn ist $\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{a. ab} = \lambda \overline{m} - \lambda \overline{am}$, das ist, der Werth der Rente auf das *Ueberleben* der Person vom

Alter m , über die vom Alter a , oder der baare Werth der Wittwenrente, wenn m das Alter der Ehefrau, und a das des Mannes ist. (Einl. §. 127.)

Ferner ist $\lambda_{ab} - \lambda_{abb} = \lambda_m - \lambda_{bm}$ der Werth des Ueberlebens, im Fall b das Alter des Mannes oder des Versorgers, und m wiederum das Alter der Frau ist; und $\lambda_{abb} - \lambda_{a.abb} = \lambda_\mu - \lambda_{a\mu}$ ist dieser Werth, wenn die versorgende Person vom Alter a , und die nach dem Tode von jener die Rente genießende vom Alter μ ist. Daher können diese Werthe aus der XXVIIsten Tabelle genommen werden, sobald man die Mittelalter m , und μ ausgemacht hat.

Nun ist aber μ ein höheres Alter als m . Denn $\lambda_{abb} = \lambda_\mu$ ist kleiner als $\lambda_{ab} = \lambda_m$, folglich das Mittelalter für jene kleinere Leibrente gröfser.

Daher auch $\lambda_\mu - \lambda_{a\mu}$ kleiner als $\lambda_m - \lambda_{am}$. Weil das Alter des Versorgers a dasselbe ist, und das Alter der überlebenden Person im ersten Fall gröfser als im letzten ist.

Folglich auch $n^2 (\lambda_{ab} - \lambda_{a.abb})$ gröfser als $n^2 (\lambda_{abb} - \lambda_{aabb})$.

Also ist in jedem Fall

$$\lambda'_{ab} = \lambda_{ab}$$

$$+ n (\lambda_{ab} - \lambda_{aab}) + n (\lambda_{ab} - \lambda_{abb})$$

$$+ n^2 (\lambda_{ab} - \lambda_{aab} - (\lambda_{abb} - \lambda_{aabb}))$$

gröfser als λ_{ab} , wenn nämlich n eine positive Zahl ist.

60.

Ex. Es sey das Alter des Ehemannes 45 Jahr, der Ehefrau 35 Jahr, die Frage ist, wie groß wird die Eherente nach der wirklichen Sterblichkeit seyn, wenn
1) $n = 0,4$, und 2) wenn $n = 0,3$ auf 4 pro Cent gerechnet?

Hier ist also $a = 35$; $b = 45$.

Folglich $\lambda_{\overline{ab}}$ nach Tab. XXIV. $= 9,7091$. Nun ist auch (nach Tab. XVI.) $9,7091 = \lambda_{\overline{54,7}} = \lambda_{\overline{m}}$.

Daraus (nach Tab. XXVII.) $\lambda_{\overline{ab}} - \lambda_{\overline{aab}}$
 $= \lambda_{\overline{54,7}} - \lambda_{\overline{35.54,7}} = 1,4958$
 und $\lambda_{\overline{ab}} - \lambda_{\overline{abb}} = \lambda_{\overline{54,7}} - \lambda_{\overline{45.54,7}} = 2,0779$.

Ferner ist $\lambda_{\overline{abb}} = \lambda_{\overline{mb}} = \lambda_{\overline{54,7.45}} = 7,6308$
 $= \lambda_{\overline{62,6}}$ (nach Tab. XVI.) und (nach Tab. XXVII.)
 $\lambda_{\overline{62,6}} - \lambda_{\overline{62,6.35}} = 0,9732$; also $\lambda_{\overline{ab}} - \lambda_{\overline{aab}}$
 $-(\lambda_{\overline{abb}} - \lambda_{\overline{aabb}}) = 1,4958 - 0,9732 = 0,5226$.

Dadurch erhält man, wenn $n = 0,4$, die *Eherente* nach der *wirklichen* Sterblichkeit,

oder $\lambda'_{\overline{ab}} = 9,7091 + 0,4. 1,4958 + 0,4. 2,0779$
 $+ 0,16. 0,5226 = 9,7091 + 1,5131 = 11,2222$,
 das ist 16 pro Cent mehr als die tabellarische Eherente beträgt, oder auf jede jährliche Hebung von 10, mehr 15.

Wenn $n = 0,3$, so wird

$\lambda'_{\overline{ab}} = 9,7091 + 0,3. 1,4958 + 0,3. 2,0779$
 $+ 0,09. 0,5226 = 9,7091 + 1,1911 = 10,8282$,
 das

das ist 13,6 pro Cent mehr als die tabellarische Rente, oder nahe an 12 mehr auf jede jährliche Hebung von 10.

61.

Aufgabe 3. Den Werth der Verbindungsrente für zwei Personen vom Alter a und b zu finden, nach der wirklichen Sterblichkeit, wenn diese für die zwei Personen verschieden ist.

Auflösung. Es sey n die beständige Gröſse für die Person vom Alter a ; und für die zwote Person vom Alter b , sey dafür n' zu setzen, so ist

$$\begin{aligned} \lambda' \overline{ab} &= \lambda \overline{ab} + n (n' + 1) (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab}) \\ &+ n (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab}) + n' (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb}) \\ &+ n n' (\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aabb}). \end{aligned}$$

Beweis. In einem allgemeinen Gliede der Reihe für die Verbindungsrente nach der Tabelle wird anstatt $\overline{A}^x$, gesetzt $(n + 1) \overline{A}^x - n \frac{(\overline{A}^x)^2}{A}$, und für $\overline{B}^x$ die Zahl

$(n' + 1) \overline{B}^x - n' \frac{(\overline{B}^x)^2}{B}$. Dadurch wird in der Reihe für $\lambda' \overline{ab}$, das allgemeine Glied

$$\begin{aligned} &= \frac{(n + 1) (n' + 1) \overline{A}^x \overline{B}^x}{A B \cdot r^x} - n (n' + 1) \frac{(\overline{A}^x)^2 \overline{B}^x}{A A \cdot B \cdot r^x} \\ &- n' (n + 1) \frac{\overline{A}^x (\overline{B}^x)^2}{A \cdot B B \cdot r^x} + n n' \frac{(\overline{A}^x)^2 (\overline{B}^x)^2}{A A \cdot B B \cdot r^x}. \end{aligned}$$

Daraus

Daraus wird, (wie oben im §. 57.)

$$\begin{aligned}\lambda' \overline{ab} &= (n+1)(n'+1) \lambda \overline{ab} - n(n'+1) \lambda \overline{aab} \\ &\quad - n'(n+1) \lambda \overline{abb} + nn' \lambda \overline{aabb} \\ &= \lambda \overline{ab} + (n'+1)(\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab}) \\ &\quad + n'(\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb}) - nn'(\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aabb}).\end{aligned}$$

Dies ist wiederum in jedem Fall mehr als die tabellarische Rente, so lange n und n' beyde positive Gröſſen sind.

Ex. 1. Es sey wiederum $a = 35$; $b = 45$, und für a sey $n = 0,4$; für b sey $n = 0,3$; so wird der Werth der Verbindungsrente nach der wirklichen Sterblichkeit, oder

$$\begin{aligned}\lambda' \overline{35.45} &= 9,7091 + 0,4.1,4958 + 0,3.2,0779 \\ &\quad + 0,12.0,5236 = 9,7091 + 1,2844 = 10,9935,\end{aligned}$$

oder nahe 13 Procent mehr, als der Werth nach den Tabellen, und auch nahe an 13 mehr für jede jährliche Hebung von 10.

Ex. 2. Wenn $a = 45$; $b = 35$, so ist

$$\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab} = 2,0779$$

$$\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb} = 1,4958$$

und $\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab} - (\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aabb})$ (wie im §. 60.) $= 0,5226$.

Folglich wenn für a , $n = 0,4$, und für b , $n = 0,3$, so ist

$$\begin{aligned}\lambda \overline{ab} &= 9,7091 + 0,4.2,0779 + 0,3.1,4058 \\ &\quad + 0,12.0,5226 = 9,7091 + 1,34161 = 11,0507\end{aligned}$$

das ist um 13,8 Procent mehr als der tabellarische Werth.

62.

Aufgabe 4. Den Werth der Rente auf das Ueberleben einer Person vom gegebenen Alter a über eine andere vom Alter b nach der wirklichen Sterblichkeit zu finden, wenn diese verschieden ist bey den zwo Personen.

Auflösung. Es sey wie vorher bey der Person vom Alter a , die beständige Gröfse n ; und bey der vom Alter b , n' , und die erstere vom Alter a diejenige, welche die jährliche Leibrente nach dem Tode der zwoten vom Alter b ziehen soll.

Alsdenn ist der baare Werth der Rente auf das Ueberleben, oder $\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} = \lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab} + n (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa} - (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab})) - n' (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb}) + nn' (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab} - (\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aabb}))$.

Beweis. Es ist $\lambda' \overline{a} = \lambda \overline{a} + n (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa})$ (§. 53.) und $\lambda' \overline{ab} = \lambda \overline{ab} + n (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab}) + n' (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb}) + nn' (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab} - (\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aabb}))$. (§. 60.)

Folglich

$$\begin{aligned} \lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} &= \lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab} + n (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa}) \\ &\quad - n (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab}) - n' (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb}) \\ &\quad - nn' (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab} - (\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aabb})) \\ &= \lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab} + n (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa} - (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab})) \\ &\quad - n' (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{abb}) - nn' (\lambda \overline{ab} - \lambda \overline{aab} \\ &\quad - (\lambda \overline{abb} - \lambda \overline{aabb})). \end{aligned}$$

63.

Zusatz 1. Es ist dieser gesuchte Werth auch der baare Werth einer *beständigen jährlichen Wittwenrente nach der wirklichen Sterblichkeit*, oder der Werth des *Einsatzes* in Wittwencassen auf eine solche Rente für die überlebende Ehefrau.

64.

Zusatz 2. Der hier gesuchte Werth wird am kürzesten gefunden, wenn vorher die Werthe der Leibrente, und der Verbindungsrente, jede für sich nach §. 53. und 59. gesucht sind. Die allgemeine Formel in dieser Aufgabe dienet nur, um allgemeine Resultate über die Folgen der abweichenden Sterblichkeit auf jene Werthe zu erhalten.

Ist z. E. a das Alter der Frau, 35 Jahr, b das Alter des Mannes 45 Jahr, und für die Ehefrauen $n = 0,4$; für die Männer $n' = 0,3$; so ist $\lambda' \overline{a} = 15,4215$. (§. 54.) und $\lambda' \overline{ab} = 10,9935$. (§. 61.) Daher $\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} = 4,4280$. Nach den Tabellen ist selbige 4,4084. Also in jenem Fall nach der wirklichen Sterblichkeit nur um 0,0196, das ist etwa um $\frac{1}{2}$ Procent grösser, oder in Hinsicht auf die jährliche Hebung 2 Procente mehr.

Es ist nicht zu verwundern, daß der Werth der Einsätze in einigen Fällen grösser werde, obschon die Sterblichkeit geringer ist. Die Folge der geringern Sterb-

Sterblichkeit ist, auf einer Seite, daß die Ehezeit länger dauert, und dadurch die Wittwe später zur Hebung kommt; auf der andern aber, daß die Dauer des Ueberlebens der Wittwe vergrößert werden kann. Das letztere kann den Werth der Einfätze noch mehr vergrößern, als jenes ihn vermindert.

Ex. 2. Ist $n = 0,4$, für beyde Personen, also $n = n'$, und a wiederum $= 35$; $b = 45$ Jahr, so ist $\lambda' \overline{a} = 15,4215$. (§. 54.) und $\lambda' \overline{ab} = 11,2212$. (§. 60.) Folglich $\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} = 4,2003$. Der tabellarische ist $4,4084$; also jener *kleiner* um $0,2081$, das ist, fast um 5 Procent, und um 21 Procent für die jährliche Hebung.

Ex. 3. Ist noch $n = n' = 0,3$, so ist $\lambda' \overline{a} = 15,0955$. (§. 54.) und $\lambda' \overline{ab} = 10,8282$. (§. 60.) Also $\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} = 4,2673$, um $0,1411$, oder 3 Procent kleiner als der tabellarische, und auf die jährliche Hebung 14 Procent.

Ex. 4. Es sey umgekehrt die zu versorgende Person die ältere, der Versorger der jüngere, oder hier $a = 45$, und $b = 35$, und dann $n = 0,4$; $n' = 0,3$, so ist

$$\lambda' \overline{a} = 13,2806 \quad (\S. 54.) \quad \text{und}$$

$$\lambda' \overline{ab} = 11,0507 \quad (\S. 61.)$$

$$\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} = 2,2299$$

$$\text{Aber } \lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab} = 2,3017$$

Unterschied $0,0718$, etwas über 3 Procent ist der ersten Werth *geringer*, oder 7 Procent der jährlichen Hebung.

Ex. 5.

Ex. 5. Es sey für denselben Fall $n = n' = 0,4$, so ist

$$\lambda' \overline{a} = 13,2806 \quad \S. 54.$$

$$\lambda' \overline{ab} = 11,2312 \quad \S. 60.$$

$$\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} = 2,0594$$

$$\lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab} = 2,3017$$

Unterschied $= 0,2423$, nahe an $10\frac{1}{2}$ Procent weniger als nach den Tabellen, und 24 Procent der jährlichen Hebung.

Ex. 6. Es sey $n = n' = 0,3$, so ist

$$\lambda' \overline{a} = 12,9631 \quad \S. 54.$$

$$\lambda' \overline{ab} = 10,8282 \quad \S. 60.$$

$$\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{ab} = 2,1349 \quad \text{Dagegen}$$

$$\lambda \overline{a} - \lambda \overline{ab} = 2,3017$$

Unterschied $= 0,1668$. Jener ist nahe an 7 Procent geringer als der tabellarische, und 17 Procent der jährlichen Hebung weniger.

65.

Zusatz 3. Sind die Personen beyde von gleichem Alter, und ist $n = n'$, so wird die Abweichung in den Einfätzen, oder der Unterschied $\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{aa} - (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{aa}) = n(\lambda \overline{a} - 3 \lambda \overline{aa} + 2 \lambda \overline{aaa}) - n n(\lambda \overline{aa} - 2 \lambda \overline{aaa} + \lambda \overline{aaaa})$. Das letzte abzuziehende Stück ist jedesmal (nach §. 59.) eine positive Gröſſe, wenn n positiv ist. Allein das erste Stück $n(\lambda \overline{a} - 3 \lambda \overline{aa} + 2 \lambda \overline{aaa})$

ist schon für sich *negativ*, wenn das Alter zwischen 15 und 60 Jahren ist.

Es ist nämlich solches

$$= n (\lambda_{\overline{a}} - \lambda_{\overline{aa}} - 2 (\lambda_{\overline{aaa}} - \lambda_{\overline{aaaa}}))$$

Man nehme 1) $a = 15$ Jahr, so ist

$$\lambda_{\overline{a}} - \lambda_{\overline{aa}} = 2,9800, \text{ nach Tab. XXVII.}$$

$$\lambda_{\overline{aa}} = 14,6304 = \lambda_{\overline{32,5}} \text{ nach Tab. XVI.}$$

$$\text{Folglich } \lambda_{\overline{aa}} - \lambda_{\overline{aaa}} = 1,9000, \text{ nach Tab. XXVI.}$$

$$\text{Also } \lambda_{\overline{a}} - \lambda_{\overline{aa}} - 2 (\lambda_{\overline{aa}} - \lambda_{\overline{aaa}}) = 2,9800 - 3,8000 = -0,8200.$$

2) Es sey $a = 60$ Jahr, so ist

$$\lambda_{\overline{a}} - \lambda_{\overline{aa}} = 2,7847; \text{ und } \lambda_{\overline{aa}} = 5,5575 = \lambda_{\overline{72}}.$$

$$\text{Also } \lambda_{\overline{aa}} - \lambda_{\overline{aaa}} = 1,4250.$$

$$\text{Folglich } 2,7847 - 2,8500 = -0,0653.$$

3) Es sey dagegen $a = 70$ Jahr, so ist

$$\lambda_{\overline{a}} - \lambda_{\overline{aa}} = 2,3801, \text{ und}$$

$$\lambda_{\overline{aa}} = 3,6100 = \lambda_{\overline{83,2}}.$$

$$\text{Aber } \lambda_{\overline{aa}} - \lambda_{\overline{aaa}} = \lambda_{\overline{83,2}} - \lambda_{\overline{70.83,2}} = 1,0417.$$

$$\text{Also } 2,3821 - 2,0834 = +0,2967.$$

Sucht man auch $\lambda_{\overline{aaa}} - \lambda_{\overline{aaaa}}$, so erhält man

$$\lambda_{\overline{aaa}} = \lambda_{\overline{70.83,2}} = 2,5977 = \lambda_{\overline{88}}, \text{ und } \lambda_{\overline{88}} - \lambda_{\overline{70.88}} = 0,5981.$$

$$\text{Folglich } \lambda_{\overline{aa}} - \lambda_{\overline{aaa}} - (\lambda_{\overline{aaa}} - \lambda_{\overline{aaaa}}) = 1,0417 - 0,5981 = 0,4436.$$

Der gesammte Unterschied ist hier

$$= n.0,2967 - n.0,4436 = n(0,2967 - n.0,4436).$$

Dies

Dies ist eine positive Differenz, es sey denn dafs $n = 0,7$, oder doch nur wenig kleiner genommen werde.

66.

Zusatz 4. Die Einfätze, oder die Renten aufs Ueberleben nach der wirklichen Sterblichkeit, werden *kleiner* seyn als die tabellarischen, wenn die *Person, welche überleben soll*, *älter* ist als die andere, nach deren Tode jene die Rente ziehen soll, oder bey Wittwenverforgungen, wenn der Mann jünger als die Frau ist, vorausgesetzt dafs $n = n'$, und positiv ist. Dagegen nehmen sie zu, werden den tabellarischen Werthen gleich, und können sie übertreffen, wenn die Frau jünger, der Mann älter ist. In dem ersten Fall ist die Verminderung des Einfatzes, welche aus der geringern Sterblichkeit entspringt, größer; im letztern kleiner, und dagegen die Dauer des Ueberlebens bey Wittwen größer.

Zusatz 5. Ist n' bey der versorgenden Person größer, als n bey der, welche die Erwartung hat, so werden die Werthe der Renten *kleiner*; größer im entgegengesetzten Fall.

67.

Zusatz 6. Der Fall, wo das Alter der erwartenden Person, oder der zu versorgenden Frau, $a = 35$ Jahr, das Alter der zwoten Person, oder des Ehemannes, 45 Jahr ist, kommt am meisten bey Wittwencaffen in

Betracht, wenn man im Allgemeinen einen Ueberschlag machen will. Es verlohnt sich für diesen Fall noch zu untersuchen, wie weit n und n' verschieden seyn können, ohne daß der Werth des Einsatzes dadurch vergrößert oder vermindert werde.

Es sey $\lambda' \bar{a} - \lambda' \bar{ab} - (\lambda \bar{a} - \lambda \bar{ab}) = D$, das ist der Unterschied der Werthe nach der wirklichen und nach der tabellarischen Sterblichkeit, so ist

$$\begin{aligned} D = & n (\lambda \bar{a} - \lambda \bar{aa}) - n (\lambda \bar{ab} - \lambda \bar{aab}) \\ & - n' (\lambda \bar{ab} - \lambda \bar{abb}) - n n' (\lambda \bar{ab} - \lambda \bar{aab} \\ & - (\lambda \bar{abb} - \lambda \bar{aabb})) \text{ nach §. 62.} \end{aligned}$$

Nun auch $\lambda \bar{a} - \lambda \bar{aa} = 3,2599$ nach Tab. XXVII.

Ferner $\lambda \bar{ab} - \lambda \bar{aab} = 1,4958$,

$\lambda \bar{ab} - \lambda \bar{abb} = 2,0779$, und

$\lambda \bar{ab} - \lambda \bar{aab} - (\lambda \bar{abb} - \lambda \bar{aabb}) = 0,5226$
(nach §. 60.)

Man schreibe $n' = m n$, so wird $D = 0$, wenn
 $n. 3,2599 = n. 1,4958 + m n. 2,0779 + m n^2. 0,5226$
und

$$3,2599 - 1,4958 = m. 2,0779 + m n. 0,5226.$$

$$\text{Daraus } \frac{1,7641}{2,0779 + n. 0,5226} = m.$$

Man kann ziemlich zuverlässig $n = 0,4$ annehmen.
(§. 48.) Daraus wird $m = 0,77$. Also müßte
 $n' = 0,308$, oder $0,31$ bey den Männern seyn; oder
wenn man $m = 0,8$ nimmt, $n' = 0,32$ seyn.

68.

Zusatz 7. Nun ist zwar bey den Männern in der Calenbergischen Gesellschaft nur $n = 0,27$ im Durchschnitt befunden, (§. 49.) allein dieß gilt nur von denen, die in dem ersten Termin eintreten. Die folgenden würden nach aller Wahrscheinlichkeit, n etwas größer gegeben haben, (§. 2.) Daher glaube ich, es lasse sich als ein ficherer Resultat annehmen:

„Wenn die Calenbergische Gesellschaft Einsätze nach den Süßmilchischen Tabellen genommen hätte, so würde kein Mangel in Cassa entstanden, und die Nachtheile aus der etwas größern Sterblichkeit der Männer durch die mindere allgemeine Sterblichkeit in der ausgesuchten Gesellschaft wiederum gut gemacht worden seyn.“

69.

Aufgabe 5. Den Werth der beständigen Wittwenrente in jährlichen Beyträgen, während der Ehedauer, nach der wirklichen Sterblichkeit zu finden, oder, im Allgemeinen, die Grösse der jährlichen Termine einer Verbindungsrente zweier Personen vom gegebenen Alter a und b zu finden, davon der baare Werth so groß ist, als der Werth der Rente auf das Ueberleben der einen über die andere.

Auflösung.

1) Wenn der Beytrag am Ende des Jahrs jedesmal bezahlet wird, oder die Verbindungsrente eine

gewöhnliche Verbindungsrente seyn soll, so ist

$$C' = \frac{\lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{a} \overline{b}}{\lambda' \overline{a} \overline{b}}, \text{ wo } C' \text{ die Gröſſe der jährlichen}$$

Termine oder der jährlichen Beyträge ist. Denn es soll

$$C' \lambda' \overline{a} \overline{b} = \lambda' \overline{a} - \lambda' \overline{a} \overline{b} \text{ seyn.}$$

2) Wenn die Beyträge *vorschussweise* im Anfang jedes Jahrs bezahlet werden, so ist

$$C' = \frac{\lambda' \overline{a} \lambda' \overline{a} \overline{b}}{1 + \lambda' \overline{a} \overline{b}}.$$

Denn in diesem soll $\lambda' \overline{a} - \lambda \overline{a} \overline{b} = C' + C' \lambda' \overline{a} \overline{b}$ seyn.

Diese letzten Beyträge sind es, die in der XXVIIsten Tabelle stehen. Die meisten male sind es auch diese die man meint.

70.

Zusatz 1. Aus der Natur der Sache ist auch ohne Rechnung begreiflich, daß der Vortheil aus einer geringern Sterblichkeit erheblicher seyn werde, wenn die Wittwenrenten auf *Beytragsfuß* zu bezahlen sind, als bey dem *Capitalfuß*. Leben beyde Personen länger, als nach den Tabellen erwartet ist, so wird wegen der längern Dauer der Verbindung, nicht nur 1) die Wittwenrente später zahlbar, sondern 2) es kommen auch mehr Beyträge zur Casse. Der letztere Vortheil fehlet bey den Einfätzen.

Dies zeigt auch der allgemeine Ausdruck. Ist der Beytrag nach den Tabellen C; der für die wirkliche Sterblichkeit, C', so ist

$$C' =$$

$$C' = \frac{\lambda'_a \lambda'_{ab}}{\lambda'_{ab}}, \text{ nämlich Beytrag ohne Vorschufs}$$

nach n. 1. §. 69. Man setze der Kürze wegen den *Unterschied* der *Einsätze*, oder $\lambda'_a - \lambda'_{ab} - (\lambda_a - \lambda_{ab}) = d$; und den Unterschied der Verbindungsrenten $\lambda'_{ab} - \lambda_{ab} = \delta$, so ist

$$C' = \frac{\lambda_a - \lambda_{ab} + d}{\lambda_{ab} + \delta} = \frac{\lambda_a - \lambda_{ab}}{\lambda_{ab}} - \frac{\delta (\lambda_a - \lambda_{ab})}{\lambda_{ab} (\lambda_{ab} + \delta)} + \frac{d}{\lambda_{ab} + \delta}.$$

$$\text{Folglich } C - C' = \frac{\delta (\lambda_a - \lambda_{ab}) - d \lambda_{ab}}{\lambda_{ab} (\lambda_{ab} + \delta)};$$

Nun ist λ'_{ab} jedesmal gröfser als λ_{ab} , wenn die Sterblichkeit geringer ist, §. 59. folglich ist δ eine *positive* Zahl. Diefs ist $\lambda_a - \lambda_{ab}$ gleichfalls.

Ist nun auch der *Einsatz* nach der wirklichen Sterblichkeit *kleiner* als der tabellarische, so ist d *negativ*, folglich $-d \lambda_{ab}$ eine *positive* Gröfse; dann wird noch mehr $C - C'$ *positiv*, oder C *nach den Tabellen gröfser als nach der wirklichen geringern Sterblichkeit*.

Ist aber gleich d *positiv*, das ist, der Einsatz nach den Tabellen *kleiner*, als nach der wirklichen Sterblichkeit, also $-d \lambda_{ab}$ *negativ*, so kann doch $\delta (\lambda_a - \lambda_{ab}) - d \lambda_{ab}$ *positiv* seyn, und diefs auch deswegen, weil der Factor $\lambda_a - \lambda_{ab}$ den Factor λ_{ab} übertreffen kann in solchen Fällen, wo die Frau, deren Alter a , um vieles jünger ist, als der Mann, dessen Alter b ist. Bey den

Einsätzen hat das grösste Alter des Mannes die Folge, daß der Vortheil aus der geringern Sterblichkeit geschwächt wird, oder gar in Nachtheil übergeht, (nach §. 66; hier aber bey den Contributionen ist jenes von einer Seite vortheilhaft.

71.

Zusatz 2. Der Unterschied der Beyträge $C - C'$ ist auch
$$= \frac{\delta \cdot \lambda_a - \lambda_{ab} \cdot n \cdot (\lambda_a - \lambda_{aa})}{\lambda_{ab} - (\lambda_{ab} + \delta)}.$$
 Denn es

$$\text{ist } d = \lambda'_a - \lambda'_{ab} - (\lambda_a - \lambda_{ab}) = \lambda'_a - \lambda_a - (\lambda'_{ab} - \lambda_{ab}) = n(\lambda_a - \lambda_{aa}) - \delta.$$

$$\text{Folglich } C' - C = \frac{\delta \cdot (\lambda_a - \lambda_{ab}) - d \lambda_{ab}}{\lambda_{ab} \cdot (\lambda_{ab} + \delta)} = \frac{\delta \cdot \lambda_a - n \cdot \lambda_{ab} (\lambda_a - \lambda_{aa})}{\lambda_{ab} \cdot (\lambda_{ab} + \delta)}.$$

Zusatz 3. Ist von vorschüsslichen Beyträgen die Rede, so wird

$$\begin{aligned} C - C' &= \frac{\delta \cdot (\lambda_a - \lambda_{ab}) - d(1 + \lambda_{ab})}{(1 + \lambda_{ab}) \cdot (1 + \lambda_{ab} + d)} \\ &= \frac{\delta(1 + \lambda_a) - n \cdot (1 + \lambda_{ab}) \cdot (\lambda_a - \lambda_{aa})}{(1 + \lambda_{ab})(1 + \lambda_{ab} + \delta)} \end{aligned}$$

72.

Ex. 1. Es sey $a = 35$; $b = 45$ Jahr, und

$$1) \ n = n' = 0,4.$$

$$\text{so ist } C' = \frac{\lambda'_a - \lambda'_{ab}}{\lambda_{ab}} = \frac{4,2003}{11,2212} \quad (\S. 64.)$$

$$= 0,3743.$$

Soll

Soll C' der vorschüssliche Beytrag seyn, so ist solcher $= \frac{4,2003}{12,2213} = 0,3437$. Dagegen ist der tabellarische Beytrag nach Tab. XXVII. $= 0,4116$. Jener also *kleiner* um $0,0679$, das ist nahe 6,8 Procent der zu versichernden Pension.

$$2) \ n = n' = 0,3.$$

$$\text{so ist } C' = \frac{4,2673}{10,8282} (\S. 64.) = 0,3941.$$

$$\text{Und der vorschüssliche Beytrag} = \frac{4,2673}{11,8282} = 0,3608.$$

Dies ist kleiner als $0,4116$, um $0,0508$, das ist um 5 Procent der Pension oder der jährlichen Hebung,

$$3) \ n = 0,4; \ n' = 0,3.$$

$$\text{so ist } C' = \frac{4,4280}{10,9935} = 0,4028, \text{ und der vorschüssliche}$$

$$\text{Beytrag} = \frac{4,4280}{11,9935} = 0,3692 \text{ kleiner als } 0,4116,$$

um $0,0424$, das ist, um 4 Procent der Hebung.

73.

Ex. 2. Es sey $a = 45; b = 35$.

$$1) \ n = n' = 0,4.$$

$$\text{so ist } C' = \frac{\lambda' \overline{a} - \lambda \overline{a} \overline{b}}{\lambda' \overline{a} \overline{b}} = \frac{2,0594}{11,2212} = 0,1835.$$

$$\text{Der vorschüssliche Beytrag ist } \frac{2,0594}{12,2212} = 0,1685.$$

Dagegen ist nach den Tabellen $C = 0,2149$. Also der Unterschied $= 0,0464$, das ist, auf jede Pension 4,6

Procent weniger, aber in Hinsicht auf den zu leistenden Beytrag selbst, mehr als $21\frac{1}{2}$ Procent weniger.

$$2) \ n = n' = 0,3.$$

so ist $C' = \frac{2,1349}{10,8282} = 0,1972$. Der vorschüssliche

Beytrag ist $\frac{2,1349}{11,8282} = 0,1805$, um 3,4 Procent der jährlichen Hebung geringer, und um 16 Procent auf die Beyträge selbst.

$$3) \ n = 0,4; \ n' = 0,3.$$

so ist $C' = \frac{2,2299}{11,0507} = 0,2018$. Der vorschüssliche

Beytrag $= \frac{2,2299}{12,0507} = 0,1850$. Also kleiner um 3 Procent auf die Pension, und um 12 Procent der Beyträge.

74.

Zusatz 4. Es sey $a = 35$; $b = 45$ Jahr, und bey den Frauen vom Alter a , sey $n = 0,4$, so findet man den Werth, welchen $n' = m n$ bey den Männern haben muß, wenn der *Beytrag* dem *tabellarischen* gleich seyn soll. Ist denn n' größer als dieser Werth, so wird der wirklich erforderliche Beytrag kleiner als der *berechnete*, und die Casse, welche nach den Tabellen einnimmt, gewinnt; dagegen verliert sie, wenn n' kleiner ist als die gefundene Zahl.

Soll

Soll nämlich $C' - C = 0$ seyn, so muß nach §. 70.
 $\delta (\lambda_a - \lambda_{ab}) = d. \lambda_{ab}$ seyn, oder nach §. 71. *Zus. 2.*
 $\delta \lambda_a = n. \lambda_{ab}. (\lambda_a - \lambda_{aa}).$

Hier wird aber auf nicht - vorschüssliche Beyträge gerechnet.

Nun ist für den angenommenen Fall
 $\delta = n. 1,4958 + m n. 2,0779 + m n^2. 0,5226$ (nach §. 61.), und $\lambda_a = 14,1175$, auch $\lambda_{ab} = 9,7091$, und $\lambda_a - \lambda_{aa} = 3,2599$.

Daraus erhält man

$$14,1175 (1,4958 + m. 2,0779 + m n. 0,5226) = 9,7091 \cdot 3,2599, \text{ und}$$

$$\frac{9,7091 \cdot 3,2599 - 14,1175 \cdot 1,4958}{14,1175 \cdot (2,0779 + n \cdot 0,5226)} = m. \text{ oder, weil}$$

$$n = 0,4; \frac{10,5337}{32,2853} = m = 0,326.$$

$$\text{Also } n' = m n = 0,13.$$

Setzet man diesen Werth für n' , in dem Ausdruck λ'_{ab} im §. 61., so bekommt man $\lambda'_{ab} = 10,6047$.

$$\text{und } \frac{\lambda'_a - \lambda'_{ab}}{\lambda'_{ab}} = \frac{15,4215 - 10,6047}{10,6047} = 0,4541$$

so groß als dieser Beytrag nach den Tabellen.

Rechnet man auf *vorschüssliche Beyträge*, so wird $C - C' = 0$, wenn $1 + 14,1175 (1,4958 + m. 2,0779 + m n. 0,5226) = (1 + 9,7091) \cdot 3,2599$.

Daraus wird $m = 0,356$, und $n' = m n = 0,1424$, wenig größer als vorher.

Das

Das heist bey dem vorher bestimmten Alter der Personen, kann die Sterblichkeit des weiblichen Geschlechts so viel kleiner seyn, als die des männlichen, dafs n bey jenem 0, 4 wird, wenn es bey diesem nur 0, 14 ist, und dennoch wird die Wittwenrente durch die nach den Tabellen berechnete Beyträge völlig bezahlt.

Wenn $n = 0, 4$, und $n' = 0, 14$, so ist im ersten Jahr, oder die *anfängliche wirkliche Sterblichkeit* zu der *tabellarischen* bey den Frauen vom Alter 35 Jahr, wie $1 - 0, 4 : 1 = 0, 6 : 1$, und bey den Männern vom Alter 45 Jahr, wie $1 - 0, 14 = 0, 86 : 1$. Folglich die bey den Frauen zu der bey den Männern wie $1 : 1, 4$.

74.

Zusatz 5. Bey der Calenbergischen ist n' nicht so klein gewesen, als es seyn kann, um die Casse ausser Schaden zu setzen. Es ist klar, wenn in dieser Gesellschaft von Anfang an die Beyträge nach *Süssmilchs* Tabelle bezahlt wären, sie würde der verschiedenen Sterblichkeit der Geschlechter ohnerachtet dennoch bestanden seyn. Nicht zu sagen, dafs jener Unterschied in der Sterblichkeit der Geschlechter, bey ihr nur in Hinsicht der im Anfang zusammengetretenen Personen aus den obigen Erfahrungen erweislich ist, sich also in den folgenden Jahren mehr verloren haben mögte, da die Ursachen des anfänglichen Zudrängens schwächer wurden.

76.

Zusatz 6. Sind *Beyträge* wie *Einsätze* nach einer für beyde Geschlechter gemeinschaftlichen Sterblichkeitstafel berechnet, so ist bey Wittwen - Versorgungs-Gesellschaften von der gewöhnlichen Einrichtung, die Casse sicherer bey dem sogenannten *Contributions - Fuss*, als bey dem *Capital - Fuss*. Eine geringere Sterblichkeit der Frauen verursacht bey jenem noch keine Defecte, wenn sie diese Folge schon bey dem letztern hat. Auch haben die nicht vorschüsslichen *Beyträge* einigen obgleich nicht sehr erheblichen Vorzug vor den vorschüsslichen. (§. 74.)

Ich sage *sicherer* sey das eine als das andere. Es geben die bisherigen Erfahrungen ganz und gar keinen Grund, auch bey den *Einsätzen* etwas zu befürchten, wenn diese nur nach einer bewährten Mortalitäts-Tafel, in unsern Gegenden, und überhaupt wohl in Deutschland, nach der *Süssmilchischen*, berechnet sind.



Zwote Abhandlung.

Vom Verhältniß der Wittwenzahl zu der Zahl der stehenden Ehen.

I.

Eine Gesellschaft von Ehepaaren gleichen Alters trete zusammen. Ihre Zahl sey N , das Alter der Frauen a ; das Alter der Männer sey b . Die Zahl der Lebenden in den Tabellen vom Alter a , sey A ; die zu b gehörige B ; und ${}^x A$, ${}^x B$ bezeichne die Zahl der Lebenden aus A im x ten Jahre. Dieß sind die Zahlen, die in den Tabellen bey den Jahren $a+x$; $b+x$ stehen, das ist, die im Laufe dieser Jahre und im Anfang der nächstfolgenden als *lebend* angenommen werden. Es wird hier nur auf ganze Jahre gerechnet, und aller Abgang jedesmal auf den *Anfang der Jahre* gesetzt. (Einleit. §. 50.)

So ist die Summe der stehenden Ehen im x ten Jahr $= \frac{{}^x A \cdot {}^x B}{A \cdot B} \cdot N$. Die Zahl N kann auch $= 1$ gesetzt werden, und also wegbleiben.

Die Wittwenzahl W in demselben Jahr ist

$$= \frac{{}^x A}{A} \left(1 - \frac{{}^x B}{B} \right).$$

Also das x te Jahr

$$W = {}^x B : B = 1 - \frac{{}^x B}{B}.$$

Dieses

Dieses Verhältniss ist im Anfang, wo $\frac{x}{B} = B$, unendlich groß; und wenn x das höchste Lebensjahr ist, unendlich klein, nämlich $= 0 : B$. Hier findet zwischen diesen beyden Aeufsersten kein Größtes oder Kleinstes Statt.

Die Zahl der Wittwen für sich ist ein *Größtes* in dem Jahr, wenn $\frac{x}{A} \cdot (B - \frac{x}{B})$ ein Größtes ist. Nach der Hypothese vom gleichförmigen Absterben würde dieß sich eräugnen nach der halben Altersergänzung der Frauen. (*)

2.

Die Zahl der in jedem unbestimmten x ten Jahr *neu entstehenden Wittwen* ist $\frac{A \cdot \Delta \frac{x-1}{B}}{A \cdot B}$ wenn $N = 1$ genommen wird.

Die

(*) Denn $\frac{x}{A} = x$, und $\frac{x}{B} = y$ gesetzt, so ist für den Fall dafs $x(B - y)$ ein *Maximum* seyn soll,

$$B dx = y dx + x dy.$$

Aber nach der Hypothese ist $dy = dx$, folglich $B - y = x$, und weil $B - y$ so groß ist als die Zahl der Gestorbenen aus B , und auch so groß als die Zahl der Gestorbenen aus A , das ist, als $A - x$, so ist

$$A - x = x, \text{ und } \frac{A}{2} = x, \text{ das heisset, die Witt-}$$

wenzahl ist ein Größtes, wenn die Hälfte der Frauen noch am Leben sind, und dieß ist, wenn ihre Altersergänzung halb verflossen ist.

Für das unbestimmte n te Jahr

$\frac{\frac{n}{A} \cdot \Delta \frac{n-1}{B}}{A \cdot B \cdot r^{n-1}} \lambda a + n - 1.$ Diese Reihe giebt den Werth des Ueberlebens der Frau über den Mann, oder die *Wittwenrente* (nach *Einleit.* Cap. IV, §. 18.).

4.

Wenn eine Gesellschaft von gleichen Ehepaaren als vorher (§. 1.) bestimmt ist, sich *gleichförmig recrutirt*, so müssen die folgenden Jahre durch, jedes Jahr dieselbe Zahl von Paaren, Mann und Frau von demselben Alter, wie vorher, hinzukommen.

Alsdenn ist 1) die *Summe aller entstandenen Wittwen* nach x Jahren, oder im x ten Jahr, so wie sie nämlich im Anfang dieses Jahrs geworden ist

$$= \frac{\frac{1}{A}}{A} \left(1 - \frac{\frac{1}{B}}{B} \right) + \frac{\frac{2}{A}}{A} \left(1 - \frac{\frac{2}{B}}{B} \right) + + \frac{\frac{x}{A}}{A} \left(1 - \frac{\frac{x}{B}}{B} \right).$$

Von den anfänglichen N Paaren, wo aber N immer $= 1$ gesetzt wird, sind vorhanden $\frac{\frac{x}{A}}{A} \left(1 - \frac{\frac{x}{B}}{B} \right)$; von denen in dem nächstfolgenden Jahre Eingetretenen sind $\frac{\frac{x-1}{A}}{A} \left(1 - \frac{\frac{x-1}{B}}{B} \right)$ noch da, und so weiter. Von den zuletzt im Anfang des x ten Jahrs hinzu gekommenen

menen sind, weil gleich ein Abgang von den lebenden Männern erfolgt, vorhanden $\frac{^1A}{A} \left(1 - \frac{^1B}{B} \right)$.

Die Summe aller macht $\frac{^1A}{A} + \frac{^2A}{A} + \dots + \frac{^xA}{A} -$
 $\left(\frac{^1A \cdot ^1B}{A \cdot B} + \frac{^2A \cdot ^2B}{A \cdot B} + \dots + \frac{^xA \cdot ^xB}{A \cdot B} \right)$.

2) Die Summe der stehenden Ehen ist

$$\frac{^1A \cdot ^1B}{A \cdot B} + \frac{^2A \cdot ^2B}{A \cdot B} + \dots + \frac{^xA \cdot ^xB}{A \cdot B} \dots$$

5.

Eine solche Gesellschaft kommt zum *Beharrungsstande* dann, wenn die Zahl der *stehenden Ehen*, und der *Wittwen* beständig bleibt. Bis dahin wachsen beyde.

Die Zahl der *stehenden Ehen* wird beständig, wenn entweder $\frac{^xA}{A}$, oder $\frac{^xB}{B}$ verschwindet, das ist, wenn die Altersergänzung der ältern Person verflossen ist. Die Zahl der Wittwen wird erst ein *Maximum*, und beständig, wenn $\frac{^xA}{A} = 0$ wird, das ist, nach verflossener Altersergänzung der Frauen.

Die größte und dann beständige Wittwenzahl ist gleich der *mittlern Dauer des Ueberlebens der Frau* über

den Mann, wenn die Zahl der jährlich hinzukommenden Paare $N = 1$ ist. Es ist nämlich

$$\frac{1}{A} \left(1 - \frac{1}{B} \right) + + = E_a - C_{ab}. \quad (\text{Einleitung Cap. 3. §. 109.})$$

Und die größte und beständige Zahl der stehenden Ehen ist $= C_{ab}$, oder *der mittlern Dauer der Verbindung*.

Folglich verhält sich *die Zahl der Wittwen zu den stehenden Ehen im Beharrungsstande der sich gleichförmig ergänzenden Gesellschaft, wie die Dauer des Ueberlebens zur Dauer der Verbindung, wie $E_a - C_{ab} : C_{ab}$* .

Es versteht sich, daß auf das Wiederheyrathen der Wittwen keine Rücksicht genommen werde.

6.

Ist die Frau 35, und der Mann 45 Jahr alt, so ist dieß Verhältniß $= 10,691 : 14,80 = 1 : 1,37$, das ist, auf Eine Wittwe würden nicht mehr als 1,37 Ehen kommen. Tab. XXIII.

Sind beyde vom Alter 35, so ist das Verhältniß $8,14 : 17,35 = 1 : 2,13$.

Ist die Frau 25 Jahr, der Mann 30, so ist das Verhältniß $10,90 : 20,88 = 1 : 1,975$; das ist, es kommen nahe an zwei stehende Ehen auf Eine Wittwe.

Ist die Frau 25, der Mann 35, so hat man $12,39 : 13,39 = 1 : 1,56$.

Dieß

Dies letztere Verhältniß scheint demjenigen am nächsten zu kommen, was in der vermischten Gesellschaft im gemeinen Leben gefunden wird, wenn man diese letztere im Durchschnitt als eine sich immer gleichförmig ersetzende Gesellschaft ansieht. Wenigstens wird dies wahrscheinlich durch die Erfahrungen, die Hr. *Guden* (*), freylich in einer andern Absicht, nämlich das Gegentheil zu beweisen, gesammlet hat.

7.

Aufgabe. Es sey das Verhältniß der *Wittwenzahl* (das ist solcher, die im Wittwenstande leben) zu der Zahl der *stehenden Ehen* gegeben; ferner das Verhältniß der *wiederheyrathenden Wittwen* zu der vorigen Wittwenzahl; und noch das Verhältniß der *im Wittwenstande sterbenden* zu eben derselben; die Gesellschaft sey im *Beharrungsstande*; daraus das Verhältniß der *stehenden Ehen* zu der *Zahl der Wittwen* zu finden, die aus einer solchen Zahl von Ehen entstanden seyn würde, wenn kein Wiederheyrathen Statt gefunden.

Auflösung. Die Zahl der *vorhandenen Wittwen* sey W ; der *stehenden Ehen*, E , und $E = r W$.

Ferner sey $\frac{W}{n}$ der Theil der im Anfang eines Jahrs vorhandenen Wittwen, der durch Heyrath aus der

G 3

Witt-

(*) *Theorie und Vorschläge zu Wittwencassen.* 1782. 4.

Wittwenzahl austritt. $\frac{W}{m}$ sey der durch den Tod abgehende Theil derselben. Endlich W' die Zahl der Wittwen, welche da gewesen seyn würden, wenn kein anderer Abgang der Wittwen, als durch den Tod Statt gefunden hätte.

Der jährliche Abgang der vorhandenen Wittwen ist also $= \frac{W}{n} + \frac{W}{m}$.

Der Theil $\frac{W}{m}$ enthält bloß die als Wittwen sterbende in sich. Dieß ist nicht einerley mit denen, die aus der ganzen Zahl der vorhandenen Wittwen, W , sterben, weil zur letztern auch solche gehören, die in $\frac{W}{m}$ und nach der folgenden Ehe abgehen. Weis man $\frac{W}{m}$ unmittelbar aus der Erfahrung, so bedarf es hiebey keiner Berichtigung; muß man aber aus dem gegebenen Alter der Wittwen und der Sterblichkeit für dieß Alter den Werth von m suchen, so wird dieser zweyte Theil des Abgangs $= \frac{W}{m} - \frac{W}{n m}$ seyn.

Da die Gesellschaft im Beharrungsstande ist, so ist die Zahl der jährlich von neuen aus den sterbenden Ehen hinzukommenden Wittwen dem gesammten Abgange gleich.

Wenn keine Wi derheyrahlung Statt findet, so ist der jährliche Abgang $\frac{W'}{m}$, nämlich der Theil, der durch den Tod abgeht.

Aber

Aber die Zahl der jährlich von neuen hinzukommenden Wittwen aus den stehenden Ehen ist auch so groß als $\frac{W'}{m}$. Denn im Beharrungsstande ist auch W' beständig; oder der Abgang $\frac{W'}{m}$ ist nicht größer noch kleiner als der Anwachs aus den Ehen.

Folglich hat man

$$\frac{W}{n} + \frac{W}{m} = \frac{W'}{m}.$$

Und daraus $W' = \frac{m+n}{n} \cdot W.$

Nun ist r. $W = E$

Folglich $W' = \frac{m+n}{n, r} \cdot E.$

8.

Zusatz. Unter den Ehen rechnet man hier nur die ersten Ehen, und unter den Wittwen nur die es zum erstenmale sind; die sich wieder verheyrathen, sind nur die zur zwoten Ehe schreiten, die dritte, vierte u.f.f. wird nicht in Betracht gezogen. Eben so sind hier die als Wittwen sterben, nur die in dem ersten Wittwenstande sterben. Daher ist W' die Zahl der Wittwen, die aus den ersten Ehen entstanden seyn würden, wenn keine Wiederheyrathung Statt gefunden.

Fasst man alle stehende Ehen zusammen, die ersten und die zwoten u. f. f. und eben so alle Wittwen, sie mögen es nach der ersten, oder nach der zwoten, oder dritten Ehe seyn, so ist W' die Anzahl von Wittwen, die aus so viel Ehen der Art aufgekommen seyn würden, wenn keine anders als durch den Tod davon abgegangen wäre. Das Verhältniß dieser Zahl zu der Zahl der Ehen ist es, was man sucht.

9.

Nach den von Hrn. *Guden* gesammelten (*) Erfahrungen ist $r = 4$. Eher noch etwas größer als kleiner.

Ueber das Verhältniß der wiederheyrathenden Wittwen im gemeinen Leben, zu der gesammten Anzahl der Wittwen ist eine Tabelle beygebracht, davon ich hier nur das hersetzen will, was zunächst zum Zwecke gehört.

Von

(*) Diese finden sich theils in der *Sammlung dessen, was wegen der Calenbergischen Wittwen - Verpflegungs-Gesellschaft* bis Ostern 1768 kund gemacht ist, größtentheils aber in der vorhin angeführten *Theorie von Wittwencassen*.

Von 1755 bis 1778 find zu	Hannover, Walsrode und eingepfarrten Höfen Bockenem, Hoya.	Jährlich im Durchschn. copulirt an Wittwen.	Es haben da- selbst an Wittwen gelebt 1778 und 1780.	Also ist jähr- lich von den Wittwen ver- beyrathet
		15, 5	548	I von 35
		4	87	I — 22
		3	60	I — 20
		2, 5	58	I — 23
Von 1764 bis 1778 zu	Münden, in den dasigen drey Kirch- spielen.	3, 2	115	I von 34
Von 1764 bis 1780 zu	Münder, Springe, Wallensen, Völcksen, Hemmen- dorf.	1, 65	58	I — 31
		1, 36	60	I — 44
		2, 36	75	I — 32
		1, 06	37	I — 37
		1, 30	42	I — 32
Zusammen		35, 93	1140	I — 31, 7

Die Zahlen der vorhandenen Wittwen sind bloß aus den Jahren 1778 und 1780 genommen worden. Da wären noch mehrere Jahre zu vergleichen gewesen. Uebrigens kann man mit Hr. *Guden* wohl annehmen, daß sie nicht viel sich ändern werden, und also für diese Oerter als die Zahlen im Beharrungsstande angesehen werden können.

Daraus kann $n = 32$ genommen werden.

Die Gröſſe von m kann, bis Erfahrungen ſie näher beſtimmen, ſo angenommen werden, als wenn die Wittwen im Durchſchnitt 45 Jahr alt ſind. Dann iſt $m = 50$. Es ſterbe alſo Eine aus 50 jährlich als Wittwe.

So erhält man

$$W' = \frac{50 + 32}{32 \cdot 4} \cdot E = 0,64 \cdot E.$$

Das iſt auf 64 Wittwen kommen 100 Ehen, oder auf 1 Wittwe 1,56, etwas über anderthalb Ehen.

Nimmt man das Durchſchnittsalter der Wittwen zu 50 Jahren etwan, und dann $m = 33$, ſo iſt $W' = \frac{65}{128} \cdot E$, das iſt nahe $\frac{1}{2} \cdot E$. Dann kommen 2 Ehen auf *eine* Wittwe.

IO.

Will man noch näher zum voraus beſtimmen, was ſich von *vermiſchten* Geſellſchaften in Rückſicht dieſes Punkts etwan erwarten laſſe, ſo kommen folgende Sätze dabey in Betracht.

Wenn eine Geſellſchaft im Anfange nicht aus gleichen Ehepaaren, ſondern aus mehreren *ungleichen* entſtehet, bey denen nämlich das Alter des einen oder des andern Theils, oder beyder, verſchieden iſt von dem in den übrigen Paaren, ſo kann man ſich vorſtellen, die ganze Geſellſchaft beſtehe aus mehreren kleinern, die einzeln nur die gleichen Paare enthalten. Z. B. die
Paare,

Paare, wo der Mann 30, die Frau 25 Jahr ist, machen einen Haufen für sich; die, wo beyde 30 Jahre sind, einen andern, u. f. f.

Wenn in einer solchen vermischten Gesellschaft von jeder Classe von Paaren eben so viel neue eintreten, als das erste Jahr zusammenkamen, so wird sie gleichförmig erneuert, oder recrutirt.

Die Zeit, in der die Wittwenzahl ein Größtes wird, und dann ihre Grösse beständig behält; ingleichen ihr Verhältniß zu den stehenden Ehen wird nach den obigen Sätzen leicht bestimmt. *So lange noch die Altersergänzung der jüngsten Frau in der Gesellschaft nicht verflossen ist, wächst die Wittwenzahl noch an.*

„Die Dauer des Ueberlebens der Frau, gesammelt
 „aus allen verschiedenen Classen der Paare, und bey jeder
 „der in die Zahl der Paare multiplicirt; und auf dieselbe
 „Art die Summe aller Verbindungsdauern der Classen gesucht, so ist jene Summe zu dieser, wie die größte
 „Wittwenzahl im Beharrungsstande, zu der Zahl der
 „stehenden Ehen.“

II.

Wenn die anfängliche einförmige Gesellschaft in der Folge jährlich einen immer gleichen Zuwachs erhält, aber so, daß dieser Zuwachs für jede besondere Classe von Paaren nur $\frac{1}{m}$ der anfänglichen Zahl dieser Paare ausmacht, so wird für ein unbestimmtes Jahr x , die

Summe

Summe der Wittwen seyn: 1) aus den anfänglichen Paaren,

$$\frac{x}{A} \left(1 - \frac{x}{B} \right), \text{ und 2) aus den hinzugekommenen,}$$

$$\frac{1}{m} \left(\frac{x-1}{A} \left(1 - \frac{x-1}{B} \right) + \frac{x-2}{A} \left(1 - \frac{x-2}{B} \right) + \dots + \frac{1}{A} \left(1 - \frac{1}{B} \right) \right).$$

Der *Anwachs* oder die *Abnahme* dieser Zahl in dem nächstfolgenden Jahre ist

1) aus der anfänglichen Zahl

$$= \Delta \left(\frac{x}{A} \left(1 - \frac{x}{B} \right) \right).$$

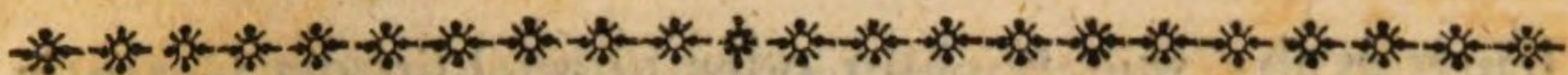
2) Und aus den hinzu gekommenen Paaren

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{x}{A} \left(1 - \frac{x}{B} \right).$$

Dieses letztere Stück ist immer ein *Anwachs*, eine positive Grösse, solange nicht $\frac{x}{A} = 0$ ist, bis ins höchste Alter der Frau. Allein das erste Stück wird *negativ*, oder ein *Decrement*, sobald $\frac{x}{A} \left(1 - \frac{x}{B} \right)$ über das Maximum (§. 1.) hinaus ist.

Daraus folgt, es könne, je nachdem die Grösse m genommen wird, die Wittwenzahl ein Größtes werden, ehe $\frac{x}{A} = 0$ wird, ohne beständig zu bleiben. Wenn aber die anfänglichen Paare alle abgestorben sind, dann entsteht sicher ein Beharrungsstand.

Dritte



Dritte Abhandlung.

Versuch über das Risiko der Casse bey Versorgungsanstalten.

Erster Abschnitt.

*Allgemeine Grundsätze, wodurch das Risiko
gefunden wird.*

I.

Bey einer *Versorgungsanstalt*, es sey Versorgung der Wittwen, oder eine jede andere, hat die Casse des Instituts ein gewisses *Risiko* auf sich. Wenn richtig gerechnet ist, so ist auch der Werth dessen, was sie gewinnen kann, den man nach der Grösse und nach Wahrscheinlichkeit desselben schätzen muß, so groß als der *Werth des Verlustes*. Das ist, die *Erwartung* ist auf beyden Seiten gleich. Allein es ist doch eben darum ein *Risiko* vorhanden. Die Casse wagt etwas zu verlieren gegen die Erwartung etwas zu gewinnen, und so weit setzet sie etwas aufs Spiel. Mann kann das nämliche sagen von jedem Interessenten, der sich auf ein solches Institut einläßt. Auch dieser kann gewinnen und verlieren. Wie groß dieß *Risiko* sey, ist, wie sich von selbst versteht, eine erhebliche Frage. Denn davon
hängt

hängt es ab, wie wichtig oder unwichtig die *Garantie* des Instituts sey? Auch die Antwort auf eine andere Frage: *ob nicht die Gesellschaft selbst die Garantie gegen die einzelnen Mitglieder auf sich nehmen könne, und ob sie nicht dabey sich besser stehe*, indem sie alsdenn auch den Gewinn behält, als wenn sie diesen an einen Entrepreneur für jene Gewährleistung überliesse?

Aber das Risiko ist auch nicht leicht zu bestimmen. So viel habe ich gesucht zu erhalten, daß wo die Grösse desselben nicht *genau* angegeben werden kann, sich doch eine gewisse Grenze als ein *Maximum* finden lasse, bis wohin es gehen könne. Die meisten male kann dies für die Praxis genug seyn.

2.

Einige Sätze aus der allgemeinen Arithmetik muß ich voran schicken.

Lehnatz 1. Es sey ein Polynomium Π in der Potenz m , oder $\Pi^m = (a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + tx^n)^m = A + Bx + Cx^2 + \dots + Kx^{m\mu-2} + Lx^{m\mu-1} + Mx^{m\mu} + Nx^{m\mu+1} + Ox^{m\mu+2} + \dots + Tx^{nm}$, wo m und n ganze Zahlen sind. Die Differenz der Exponenten der Potenzen von x , ist 1. Ferner sey

$$\mu = \frac{b + 2c + 3d + \dots + nt}{a + b + c + d + \dots + t}. \quad (\text{Es ist } \mu \text{ kleiner als } n).$$

Wenn zugleich μ eine ganze Zahl ist, so kommt

kommt die Potenz x^μ vor in dem Polynomio $\Pi = a + bx + cx^2 + \dots + hx^\mu + \dots + tx^n$; und die Potenz $x^{m\mu}$ kommt vor in Π^m . Ist μ keine ganze Zahl, so fehlt die Potenz x^μ zwar in Π , und auch kann $x^{m\mu}$ in Π^m fehlen. Das heißt dann, die Coefficienten in diesen Gliedern sind $= 0$. Aber das hindert die Allgemeinheit des gleich folgenden Satzes nicht.

Das Glied hx^μ in dem Polynomio Π und $Mx^{\mu m}$ in Π^m soll hier das *Durchschnitts-Glied* genennet werden. Es ist *nicht das mittlere*, weder der Ordnung, noch der Gröſſe nach, obgleich es auch dieſs ſeyn kann. Es läßt ſich der Coefficient deſſelben anſehen als der, in welchem der *Schwerpunkt* der übrigen liegt. Jener hat nämlich die Aehnlichkeit mit dem Schwerpunkt, daß *wenn die vorhergehenden und nachfolgenden Coefficienten in Π , jeder in die Entfernung von jenem, (oder in die Differenz der Exponenten der veränderlichen Gröſſe x) multiplicirt werden, die auf beyden Seiten entſtehende Summen ſolcher Producte einander gleich ſind.* Es ſey $\Pi = a + bx + \dots + k.x^{\mu-2} + l.x^{\mu-1} + hx^\mu + p.x^{\mu+1} + q.x^{\mu+2} + \dots + t.x^n$. Man multiplicire die Coefficienten, welche auf h folgen mit den natürlichen Zahlen nach der Ordnung, und nehme die Summe dieſer Producte, $Q' = 1.p. + 2.q + \dots + (n-\mu).t =$, und eben ſo auch die Summe der Producte der vorhergehenden Coefficienten,
jeden

jeden multiplicirt in seine Entfernung von dem Gliede x^μ , das ist, $1.l + 2.k + \dots + (\mu - 1).b + \mu.a, = Q$, so ist $Q = Q'$. Dießs erhellet aus der bekannten Art, wie der Schwerpunkt in der Mechanik bestimmt wird.

Ferner aber ist auch in Π^m das Glied $M x^{m\mu}$, worinn die Potenz $x^{m\mu}$ vorkommt, das Durchschnitts-Glied, und sein Coefficient der Durchschnitts-Coefficient in Π^m , was gleichfalls die Eigenschaft eines Schwerpunkts hat. Es ist nämlich die Summe der Producte $1.L' + 2.K + \dots + (m\mu - 1).B + m\mu.A = N + 2.O + \dots + (n - \mu).m.T$; das ist, die Summen der Momente der Coefficienten sind auf beyden Seiten einander gleich.

Der Beweis dieses Satzes kann mittelst, des Newtonischen Parallelogramms gefunden werden. So viel ich weiß, ist diese Eigenschaft der Coefficienten in den Polynomien noch von keinem bemerkt worden. Es ist etwas weitläufig den ganzen Beweis herzusetzen. Er erfordert auch in der Form, in der ich ihn habe, Sätze aus der Mechanik. Daher ich lieber einen andern haben möchte, der rein arithmetisch wäre. Und weil ohnedießs von diesem Lemma in seiner völligen Allgemeinheit nicht leicht Anwendung gemacht werden wird, so kann ich um desto mehr hier die Demonstration weglassen.

3.

Man unterscheide in jedem Polynomio folgende *Summen*.

1) Die Summe aller *vor dem Durchschnittsgliede vorhergehenden Coëfficienten* eines Polynomii. Diese Summe sey C.

2) Die Summe aller *auf das Durchschnittsglied folgenden Coëfficienten*, C'.

3) Den *Durchschnitts-Coëfficienten* selbst. Er sey M.

4) Die Summe aller Coëfficienten des Polynomii *zusammen*, $C + C' + M = S$.

5) Die Summe aller *Produkte aus den natürlichen Zahlen in ihrer Ordnung in die vor dem Durchschnittsgliede vorhergehenden Coëfficienten*, von dem nächsten Termino bey jenem an rückwärts, das ist, *die Summe der vorhergehenden Coëfficienten - Momente*, Q.

6) Die ähnliche Summe der *Produkte aus den natürlichen Zahlen in die auf das Durchschnittsglied folgende Coëfficienten*, oder die *Momenten - Summe der nachfolgenden Coëfficienten* Q'. Es ist nun $Q' = Q$.

7) Die Summe der *Produkte aus allen Coëfficienten der Polynomien, den ersten, der die veränderliche Grösse nicht bey sich hat, ungerechnet, in die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 an, jeden Coëfficienten nämlich in die zu ihm gehörige Zahl in der Reihe*

der natürlichen Zahlen multiplicirt. Diese Summe sey P.

- 8) Eine ähnliche Summe von Producten aus den Coëfficienten des Polynomii ausgenommen den letzten, in die natürlichen Zahlen, von dem nächstletzten angefangen, P'.

Noch deutlicher in folgendem Schema. Die Coëfficienten des Polynomii sollen in ihrer Ordnung seyn

$$a + b + + k + l + h + p + q + + s + t$$

das mittlere Glied h ist der Coëfficient von x^μ ; b ist der von x, und t der von x^n ,

$$\text{so ist } a + b + + k + l = C,$$

$$p + q + + t = C',$$

Ferner $C + C' + h = S$. Hier ist h der Durchschnitts-Coëfficient.

$$1. l + 2. k + + + \mu. a = Q$$

$$1. p + 2. q + + (n - \mu) t = Q'$$

und nach dem ersten Lemma ist $Q = Q'$.

$$\text{Ferner ist } 1. b + + (\mu - 2) k + (\mu - 1) l + \mu h \\ + (\mu + 1) p + (\mu + 2) q + + n t = P.$$

$$\text{und } 1. s + + (n - \mu) h + (n - \mu + 1) l + + n. a = P'.$$

4.

Zusatz 1. Die Summe der Producte P, ist jedesmal gleich dem Producte aus der Summe der Coëfficienten in die Zahl μ (nach §. 2.) oder $P = \mu S$.

Und

Und die Summe der Producte in P' ist $n \cdot S - P = (n - \mu) S$, wie fast unmittelbar einleuchtet.

Dies gilt von jedem Polynomio, ohne Ausnahme, auch von $(a + b x + c x^2 + \dots + t x^n)^m$, wo m eine ganze Zahl ist.

Zusatz 2. Sind alle Coëfficienten des Polynomii einander gleich, wie in $1 + x + x^2 + \dots + x^n$, so ist

$$\mu = \frac{1 + 2 + \dots + n}{1 + n} = \frac{n}{2}. \quad \text{Folglich kommt in}$$

$(1 + x + x^2 + \dots + x^n)^m$ statt μ nun $m \mu = \frac{m n}{2}$, als der Exponent der Potenz, dessen Coëfficient M , der *Durchschnitts-Coëfficient* ist. Die Summe aller Coëfficienten ist $(1 + n)^m$. Folglich die Summe der Producte aus den Coëfficienten von x , in die Reihe der natürlichen Zahlen von vorne an, oder $P = \frac{m n}{2} \cdot (1 + n)^m$, und P auch $= P'$.

Bei $(a + b x)^m$, ist $\mu = \frac{b}{a + b}$ für $a + b x$, und für $(a + b x)^m$ daher $m \mu = \frac{m b}{a + b}$. Folglich

$$P = \frac{m b}{a + b} \cdot (a + b)^m; \quad \text{und}$$

$$P' = \frac{m a}{a + b} (a + b)^m = m a (a + b)^{m-1}.$$

$$\text{Für } (1 + a x + b x^2), \text{ ist } \mu = \frac{a + 2b}{1 + a + b}.$$

$$\text{Und für } (1 + a x + b x^2)^m \text{ ist } m \mu = m \left(\frac{a + 2b}{1 + a + b} \right).$$

H 2

Folglich

Folglich $P = m \cdot \frac{(a+2b)}{1+a+b} \cdot (1+a+b)^m =$
 $m \cdot (a+2b) (1+a+b)^{m-1}$, und
 $P' = 2m(a+1) \cdot (1+a+b)^{m-1}$.

5.

Zusatz 3. Die Summen der Momente der Coëfficienten an beyden Seiten des Durchschnitts-Coëfficienten, sind einander gleich, $Q = Q'$; aber wenn statt des Durchschnittsgliedes das nächstvorhergehende oder das nächstfolgende genommen, und die Summe der Momente der Coëfficienten auf beyden Seiten gesucht wird, so ist ihre Differenz der Summe aller Coëfficienten S gleich. Es ist wiederum dieß leicht zu übersehen.

$$\begin{array}{cccccccc} a+b++ & k+l+h+p+q++ & t. & = & S, \\ \mu, \mu-1, 2, 1, 0, 1, 2, & & 1 \\ \mu-1, \mu-2, 1, 0, 1, 2, 3, & & r+1. \end{array}$$

Weil $1 \cdot p + 2 \cdot q + + r \cdot t = 1 + 2k + + \mu a$,
 oder $Q' = Q$, so ist $1 \cdot h + 2p + 3q + + (r+1)t$
 $= Q + C' + h = \phi'$.

Aber $1 \cdot k + + (\mu-1)a = Q - C = \phi$.
 Also $\phi' - \phi = Q' - Q + C' + C + h = S$.

Geht man zwey Glieder von dem Durchschnittsgliede vorwärts oder rückwärts, so ist die Differenz der Momente $2S$, und so ferner. Geht man fort bis auf den ersten Coëfficienten a , so wird das Moment an einer Seite zu Nichts, und das an der andern Seite ist μS , wie vorher.

6.

Lehnatz 2. Ferner, wenn die Summe der Coëfficienten dieselbe bleibt, ingleichen auch die höchste Potenz der Grösse x dieselbe, und dazu die Entfernung des Durchschnittsgliedes von dem erstern und letztern, so ist die Summe der Coëfficienten-Momente grösser, wenn alle Coëfficienten bloß in dem ersten und letzten Gliede sich befinden, und für die Zwischenglieder alle Nichts sind, als bey jeder andern Vertheilung derselben unter den gesetzten Bedingungen.

Das ist, wenn das Polynomium

$a + b x + \dots + h x^{\mu} + \dots + t x^n$ verglichen wird mit einem andern von der Form $\alpha + \beta x^n$, so daß $\alpha + \beta = (a + b + \dots + h + \dots + t)$, und auch

$$\mu = \frac{n \beta}{\alpha + \beta} = \frac{b + 2c + \dots + \mu h + \dots + nt}{a + b + c + \dots + t}. \quad (\S. 2. \text{Lemm.}$$

1.) so sind die Momente der Coëfficienten in dem letztern Polynomio $\alpha + \beta x^n$, nämlich $(n - \mu) \beta = \mu \alpha$, grösser als die Momente der Coëfficienten in dem erstern.

Ferner wenn die Summe der Coëfficienten dieselbe bleibt, und eben so die höchste Potenz von x , aber die Stelle des Durchschnittsgliedes verschieden seyn kann, so ist die Summe der Coëfficienten-Momente am grössten, wenn alle Coëfficienten in dem ersten und letzten Gliede in a und t beysammen sind, und wenn das Durchschnittsglied gleich weit vom ersten und letzten Gliede absteht,

das ist, wenn $\mu = \frac{n}{2}$, oder, wenn das Polynomium von der Form $\alpha + \alpha x^n = \alpha (1 + x^n)$ ist.

Dies ist unmittelbar klar. Denn, wo auch das Durchschnittsglied $h x^\mu$ ist, so wird das Product, wenn alle auf einer Seite liegende Coëfficienten in die größte Entfernung von demselben multiplicirt werden, größer als die vorigen Q und Q' . Oder, sind alle auf $h x^\mu$ folgende Coëfficienten in das letzte Glied t gebracht, und alle vorhergehende nach a , so entstehen zwey Producte $(n - \mu) t$, und μa , die größer sind als vorher Q und Q' waren. Wird nun auch selbst h der Coëfficient des Durchschnittsgliedes nach a und t gelegt, so werden die Momenten-Summen noch größer. Sind aber die Momente nach dieser Veränderung nicht auf beyden Seiten gleich, so kann von der einen Seite noch etwas auf die andere hinüber gebracht, also diese vergrößert werden.

Und so wie nach bekannten Grundsätzen der Mechanik, bey einer gegebenen Summe von Gewichten, und einer gegebenen Länge des Hebels, an dessen Endpunkten sie anzubringen sind, alsdenn die einander gleichen Momente, an beyden Seiten des Ruhepunkts, die größten sind, wenn die Gewichte zu gleichen Theilen an den Enden des Hebels angebracht, und beyde gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, so giebt es auch hier in dem Fall die größten Coëfficienten-Momente, wenn die
gege.

gegebene Summe der Coëfficienten zu gleichen Theilen in das erste und letzte Glied des Polynomii gebracht ist, das ist, wenn $a=t$, und $b=0$, $c=0$ und so ferner, die Summe $a+t$ aber eine *beständige* Grösse ist.

Alsdenn hat das Polynomium die Form $\alpha + \alpha x^n$,
 $= \alpha (1 + x^n)$, und es ist $\mu = \frac{n \alpha}{2 \alpha} = \frac{n}{2}$.

7.

Lehnatz 3. Wenn in dem Polynomio $(a + b x + \dots + t x^n)$, (die Summe der Coëfficienten $a + b + \dots + t$ immer dieselbe gesetzt) die Summe der Momente der Coëfficienten auf beyden Seiten des Durchschnittsgliedes am grössten ist, wenn das Polynomium von der Form $\alpha (1 + x^n)$ ist, so ist auch in dem Polynomio $\alpha^m (1 + x^n)^m$ die Summe der Momente auf beyden Seiten des Durchschnittsgliedes grösser als in dem Polynomio $\Pi^m = (a + b x + \dots + h x^{\mu} + \dots + t x^n)^m$. Es soll nämlich $\alpha + \alpha = a + b + \dots + h + \dots + t$ seyn.

Ingleichen ist in dem Polynomio von der Form $(\alpha + \beta x^n)^m$ die Summe der Momente der Coëfficienten grösser als in $\Pi^m = (a + \overset{\mu}{\beta} x + \dots + \overset{m}{\beta} x^n)^m$, wenn μ in beyden dieselbe Grösse ist, obschon nicht $= \frac{n \cdot m}{2}$.

8.

Zusatz. Folglich ist auch der Quotient, der entsteht, wenn die Summe der Coëfficienten-Momente auf

einer Seite des Durchschnittsgliedes, nämlich $Q = Q'$, durch die Summe aller Coëfficienten dividirt wird, grösser in dem Polynomio $\alpha^m (1 + x^n)^m$, als in $\Pi^m = (a + b x^n)^m$ wo a und b ungleich sind, und in dem letztern grösser als in dem Polynomio von der Form $(a + b x + \dots + t x^n)^m$, unter derselben Bedingung, dass $a + b + \dots + t$, oder die Summe aller Coëfficienten in diesen Polynomen von verschiedener Form, dieselbe sey, nämlich $= 2 \alpha = a + b$ in $(a + b x^n)^m$.

9.

Lehnsatz 4. In dem Polynomio von der Form $(1 + y)^m$ giebt es, wenn m eine gerade Zahl $= 2r$, einen grössten Coëfficienten, der in der Ordnung der $r + 1$ te ist, wenn der erste 1 mitgerechnet wird, und dieser ist $= \frac{m \cdot m - 1 \cdot \dots \cdot (m - r + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r}$. Er heisse M , so ist dieser zugleich der Durchschnitts-Coëfficient, und die Summe der Momente der Coëfficienten auf beyden Seiten von M , ist $= \frac{m}{4} M$.

Ferner. Wenn m eine gerade Zahl ist, also $m - 1$ eine ungerade $= 2r - 1$, so giebt es in $(1 + y)^{m-1}$ zween grösste Mittel-Coëfficienten; davon einer zu y^{r-1} , und der andere zu y^r gehört, die von gleicher Grösse sind. Einer davon werde bezeichnet durch M' . Als denn ist der Coëfficient, der zu $y^{r-\frac{1}{2}}$ gehört, und der hier der Durchschnitts-Coëfficient ist, auf dessen beyden
Seiten

Seiten die Coëfficienten - Momente gleich sind, $= 0$.
 Es fällt selbiger aber zwischen jene beyden grössten, die
 von ihm um $\frac{1}{2}$ entfernt stehen. Alsdenn ist wiederum

$$\text{die Summe der Momente, } Q = Q' = \frac{m \cdot M'}{4}.$$

Beweis. Beydes folgt aus den bekannten Gesetzen
 der Coëfficienten des Binomii, und weil der Beweis
 nicht sehr weitläufig ist, will ich ihn hersetzen. Ist
 1) $m = 2r$ eine gerade Zahl, so sind die Coëfficienten
 in $(1+y)^m$ bis auf den mittlern grössten, diesen ausge-
 schlossen, in der Ordnung folgende,

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} + + \frac{m \cdot m - 1 \cdot \dots \cdot (m - r + 2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r - 1} \dots$$

Es ist die Summe aller Coëfficienten des Binomii,
 $= (1+1)^m = 2^m$, daher ist die Summe jener Coëffi-
 cienten bis auf den grössten M , ohne diesen,

$$= \frac{2^m - M}{2} = 2^{m-1} - \frac{M}{2}.$$

Wird nun jeder dieser Coëfficienten von Anfang an,
 multiplicirt in eine Zahl der abnehmenden arithmeti-
 schen Reihe $\frac{m}{2}, \frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2} - 2, \dots, 1$, so geben
 die entstehenden Producte die Momente der Coëfficienten,
 deren Summe $= Q$ ist. Folglich ist

$$Q = \frac{m}{2} \cdot \left(2^{m-1} - \frac{M}{2} \right) - \left(\frac{m}{1} + \frac{2 \cdot m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + + + \frac{r-1 \cdot m \cdot m - 1 \cdot \dots \cdot m - r + 2}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r - 1} \right).$$

$$= \frac{m}{2} \cdot \left(2^{m-1} - \frac{1}{2} M \right) - \frac{m}{1} \left(1 + \frac{m-1}{1} \right. \\ \left. + \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} + + + \frac{m-1 \cdot m-2 \dots m-r+2}{1 \cdot 2 \dots r-2} \right).$$

Der zweyte Factor des letztern abzuziehenden Stücks ist die Summe der Coëfficienten von $(1+y)^{m-1}$ vom Anfang an bis auf den, der zu y^{r-2} oder $y^{\frac{m}{2}-2}$ gehört. Allein weil $m-1$ hier eine *ungerade* Zahl ist, so ist der erste von den beyden größten Coëfficienten in $(1+y)^{m-1}$ derjenige, der zur Potenz $y^{\frac{2r-1-1}{2}} = y^{r-1}$ gehört, und folglich enthält jener Factor die Coëfficienten-Summe in $(1+y)^{m-1}$, vom Anfang an bis auf den ersten größten, diesen ausgeschlossen. Man bezeichne diesen größten durch M' , jenen Factor aber durch F . Weil nun die Summe aller Coëfficienten in $(1+y)^{m-1}$

$$= 2^{m-1} = 2M' + 2F, \text{ so ist } F = \frac{2^{m-1} - 2M'}{2}.$$

Daraus wird

$$Q = \frac{m}{2} \left(2^{m-1} - \frac{1}{2} M \right) - \frac{m}{2} \left(2^{m-1} - 2M' \right)$$

Nun ist aber ferner $2M' = M$, weil

$$M = \frac{m \cdot m-1 \dots m-r+1}{1 \cdot 2 \dots r-1 \cdot r} = \\ \frac{m \cdot m-1 \dots m-r+1}{1 \cdot 2 \dots r-1 \cdot \frac{m}{2}}, \text{ und}$$

$$M' =$$

$$M' = \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \dots \cdot \overline{m-r+1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r-1}$$

$$\text{Folglich ist auch } Q = \frac{mM}{2} - \frac{mM}{4} = \frac{mM}{4}.$$

2) In $(1+y)^{m-r}$ als einer *ungeraden* Potenz, giebt es *zwey mittlere grösste Coëfficienten*, zwischen welchen der *Durchschnitts-Coëfficient* in der Mitte liegt. Um also die Summe der Coëfficienten-Momente zu haben, müssen die Coëfficienten der Potenz $m-r$, den ersten von den beyden grössten mitgenommen, deren Summe

$$1 + \frac{\overline{m-1}}{1} + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\overline{m-1} \cdot \dots \cdot (\overline{m-r-1})}{1 \cdot \dots \cdot r-2, r-1} = C \text{ ist, rückwärts multipli.}$$

cirt werden durch die Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} + \dots + r-1 + \frac{1}{2}$

oder durch $1 - \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{2} + \dots + r - \frac{1}{2}$, und

also von *vorne* angefangen, durch die Zahlen

$r, r-1, r-2 \dots 1$, wenn noch $\frac{1}{2} C$ davon abge-

zogen wird. Diefs ist daraus klar, weil *der erste grösste*

Coëfficient um $\frac{1}{2}$ *von dem Durchschnitts-Coëfficienten*

absteht, der nächst vorhergehende um $1 \frac{1}{2}$ u. f. f. bis

auf den letzten $= 1$, der zu x^0 gehört, dessen Entfer-

nung $r-1 + \frac{1}{2}$ ist.

Die

Die Summe der Coëfficienten, den ersten der beyden größten mitgerechnet, oder C ist

$$= \frac{2^{m-1}}{2} = \frac{S}{2}.$$

Daher wird die *Summe der Momente*

$$\begin{aligned} Q &= rC - \left(1. \frac{m-1}{1} + 2. \frac{m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2} \right. \\ &\quad \left. + + r-1. \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot \dots (m-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots r-2 \cdot r-1} \right) - \frac{1}{2}C. \\ &= \left(r - \frac{1}{2} \right) C - (m-1) \left(1 + \frac{m-2}{1} + + \right. \\ &\quad \left. \frac{m-2 \cdot m-3 \cdot \dots (m-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots r-2} \right). \end{aligned}$$

Der letzte Factor $1 + \frac{m-2}{1} + +$ ist die Summe der Coëfficienten des Binomii von der geraden Potenz $m-2$ bis auf den größten mittlern, diesen ausgeschlossen. Denn in $(1+y)^{m-2}$ gehört der Coëfficient des mittlern Gliedes zu y^{r-1} , und ist

$$= \frac{m-2 \cdot m-3 \cdot \dots \cdot m-r}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r-1}.$$

Daher ist $\frac{m-2 \cdot m-3 \cdot \dots \cdot m-r+1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r-2}$ der nächst vor-

hergehende Coëfficient. Es sey der mittlere größte Coëfficient in der Potenz $m-2$, M'' , so bekommt man

$$Q = \left(r - \frac{1}{2} \right) C - (m-1) \left(\frac{2^{m-2} - M''}{2} \right)$$

$$= \frac{m-1}{2} \cdot \frac{2^{m-1}}{2} - \frac{(m-1)}{2} \cdot 2^{m-2} + \frac{m-1}{2} \cdot M''.$$

$$= \frac{m-1}{2} \cdot M''.$$

Aber weil $M'' = \frac{m-2 \cdot m-3 \cdot \dots \cdot m-r}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r-1}$, und der

erste der größten Coëfficienten in der ungeraden Potenz

$m-1$, der oben M' hieß $= \frac{m-1 \cdot m-2 \cdot \dots \cdot m-r+1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r-1}$.

so ist $M'' : M' = m-r : m-1 = \frac{m}{2} : m-1$.

Folglich

$$\frac{m-1}{2} \cdot M'' = \frac{1}{4} \cdot m M' = \frac{1}{4} (m-1+1) M' = Q.$$

IO.

Lehnsatz 5. In dem Polynomio $(a+by)^n$ wo n ein Vielfaches von $a+b$ ist, dafür mt , wenn $t=a+b$, genommen werden kann, ist der Durchschnitts-Coëfficient derjenige, der zu y^{bm} gehört, und wenn dieser, der zugleich der größte Coëfficient ist, durch M bezeichnet wird, so ist die Momenten-Summe der Coëfficienten auf beyden

$$\text{Seiten} = \frac{ab}{(a+b)^2} \cdot n \cdot M.$$

Beweis. Es ist $(a+by)^n = (a+by)^{tm} =$

$$a^{tm} \left(1 + \frac{b}{a} y \right)^{tm}, \text{ und wenn } \frac{b}{a} = h, (a+by)^n$$

$$= a^{tm} \cdot (1+hy)^{tm}.$$

Weil

Weil $\frac{b}{a+b} = \mu$, und $t = a+b$, so ist $\mu t m =$
 $t m \cdot \frac{b}{a+b} = b m$ der Exponent der Potenz des Durch-
 schnittsgliedes in $(a+b y)^n$. Der Coëfficient also, der
 zu $y^{b m}$ gehört, ist der Durchschnitts-Coëfficient. (nach
Lehnsf. 1. §. 2.)

In diesem Coëfficienten ist auch $h^{b m}$ enthalten, oder
 $\frac{b^{b m}}{a^{b m}}$, und weil $h^{b m} \cdot a^{t m} = a^{(t-b) m} \cdot b^{b m} = a^{a m} \cdot b^{b m}$,
 so ist dies derselbe Coëfficient, in welchem die Expo-
 nenten der Potenzen von a und b , diesen Gröſſen selbst
 proportional sind, und der ist nach den bekannten Ge-
 setzen des Binomii der *größte Coëfficient in dem entwickel-*
ten Binomio $(a+b)^{t m}$.

Nun ist die Summe der Coëfficienten in $a^{t m} (1+hy)^{t m}$
 bis auf den größten, diesen ungerechnet,

$$a^{t m} \cdot \left(1 + \frac{m t \cdot h}{1} + \frac{m t \cdot \overline{m t - 1}}{1 \cdot 2} \cdot h^2 + + \right.$$

$$\left. \frac{m t \cdot \overline{m t - 1} \cdot \dots \cdot (m t - \overline{b m - 2})}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \overline{b m - 1}} \cdot h^{b m - 1} \right)$$

$= a^{t m} \cdot C$. Diese einzeln multiplicirt mit den Zahlen
 der arithmetischen Reihe $b m, \overline{b m - 1} \dots 1$ von
 vorne an, jeden mit seiner zugehörigen Zahl, giebt die
Summe der Momente der Coëfficienten, oder Q

$$= a^{t m} \left(b m \cdot C - \left(m t h + 2 \cdot \frac{m t \cdot \overline{m t - 1}}{1 \cdot 2} \cdot h^2 \right. \right.$$

+

$$+ + \frac{m t - 1}{b m - 1} \cdot \frac{m t - 2}{2} \dots \frac{m t - b m + 2}{b m - 2} \cdot h^{b m - 1} \Big) \Big)$$

$$= a^{t m} \cdot \left(b m C - m t h \left(1 + \frac{m t - 1}{1} h + + \frac{m t - 1}{1} \cdot \frac{m t - 2}{2} \dots \frac{(m t - b m - 2)}{b m - 2} \cdot h^{b m - 2} \right) \right)$$

$= a^{t m} (b m C - m t h \cdot C')$, wo C' die *Summe der Coëfficienten* in $(1 + h y)^{m t - 1}$ ist bis auf das Glied, worinn $h^{b m - 1}$ vorkommt, dieß letztere ungerechnet. Setzet man auch dieses letztere hinzu, und macht

$$C' + \frac{m t - 1}{1} \cdot \frac{m t - 2}{2} \dots \frac{m t - b m + 1}{b m - 2} \cdot h^{b m - 1}$$

$= C' + M'$, so ist nach dem bekannten Gesetz der Coëfficienten $h C' + C' + M' = C$. Denn wenn man die *Summe der Coëfficienten eines Binomii* von der Form $(1 + h y)^{m t - 1}$ bis zu einem gewissen Gliede hin nimmt, und eben dieselben Coëfficienten ausser dem letzten durch h multiplicirt, so giebt die *Summe jener, und der letztern mit h multiplicirten*, die *Summe der Coëfficienten in der nächst höhern Potenz $(1 + h y)^{m t}$, bis an dasselbe bestimmte Glied hin.*

$$\text{Also ist } C' = \frac{C - M'}{h + 1}$$

$$\text{Folglich wird } \frac{Q}{a^{t m}} = b m C - m t h C'$$

$$= b m C - m t h \cdot \left(\frac{C - M'}{h + 1} \right)$$

$$= \frac{(b m h + b m - m t. h) C + m t h M'}{h + 1} \dots$$

Weil aber $h = \frac{b}{a}$, und $t = a + b$; so ist auch

$$\frac{Q}{a^{tm}} = \left(b m \left(\frac{b}{a} + 1 \right) - \frac{b m}{a} (a + b) \right) \cdot \frac{C}{h + 1}$$

$$+ \frac{m t. h M'}{h + 1} = \frac{m t. h. M'}{h + 1}. \quad \text{Nun ist auch}$$

$$M' = \frac{m t - 1 \dots m t - b m + 1}{1 \dots (b m - 1)} \cdot h^{b m - 1}$$

und der *mittlere grösste Coëfficient* in $(1 + h y)^{mt}$, oder

$$M'' = \frac{m t. m t - 1 \dots m t - b m + 1}{1. 2. \dots (b m - 1). b m} \cdot h^{b m}.$$

$$\text{Also ist } M' : M'' = 1 : \frac{m t}{b m} \cdot h.$$

$$\text{Folglich } \frac{Q}{a^{tm}} = \frac{b m}{h + 1} \cdot M''.$$

Es ist aber $M'' \cdot a^{tm}$ der *grösste Coëfficient des Binomii*

$$a^{tm} \left(1 + \frac{b}{a} y \right)^{tm} \text{ oder in } (a + b y)^{tm}, \text{ also } M.$$

$$\text{Daher } Q = \frac{b m}{h + 1} \cdot M = \frac{b}{(h + 1)t} \cdot m t. M.$$

$$= \frac{b}{\left(\frac{b}{a} + 1 \right) (a + b)} m t. M = \frac{a b}{(a + b)^2} m. t. M$$

$$= \frac{a b}{(a + b)^2} n. M.$$

$$\left(\frac{M - C}{1 + h} \right) \dots$$

II.

Lehnsatz 6. Der grösste Coëfficient in dem Binomio $(\alpha + \alpha y)^{tm}$ sey $= M$. Der grösste im Binomio $(a + by)^{tm} = M'$ und $2\alpha = a + b = t$, so wird $M : M' = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} : 1$ ganz nahe, wenn m eine sehr grosse Zahl ist.

Beweis. Es sey der Zahlen - Coëfficient, so weit nämlich der Coëfficient allein von dem Exponenten der Potenz tm abhängt, in $M = K$, und der in M' sey K' , so ist $M : M' = \alpha^{tm} : a^{am} \cdot b^{bm} \cdot K'$.

Man setze $\alpha = 1$; $a = 1 + x$; $b = 1 - x$, so wird $\alpha^{tm} : a^{am} \cdot b^{bm} = 1 : (1 + x)^{m(1+x)} \cdot (1 - x)^{m(1-x)}$.

Das Verhältniß $K : K'$ ist das Verhältniß des grössten Termini im Binomio $(1 + 1)^{tm}$, zu dem Coëfficienten, der um mx von diesem entfernt ist. Denn jener ist der Coëfficient des Gliedes der Potenz y^m ; dieser des Gliedes $y^{m(1-x)}$. Der Abstand zwischen beyden ist also $m - m + mx = mx$. Nun ist nach den Untersuchungen, die *Moiivre* darüber angestellet hat (in den *Miscellan. Analyt.* p. 103.) das Verhältniß

$$K : K' = (m + mx - 1)^{m + mx - \frac{1}{2}} : (m - mx - 1)^{m - mx - \frac{1}{2}}$$

$1 + x : m^{2m}$, wenn m eine grosse Zahl, und mx nicht gar zu gross ist, denn sonst muß dieser Ausdruck

noch eine Correction haben, die aber wenigstens zu der gegenwärtigen Absicht nicht in Betracht kommen darf. (*Miscell. analyt. suppl.* p. 18.)

Daraus wird

$$K:K' = (m + mx - 1)^{m+mx} \cdot (m - mx - 1)^{m-mx}.$$

$$\left(\frac{m - mx - 1}{m + mx - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x) : m^{2m}$$

$$= m^{m(1+x)} \cdot \left(1 + x - \frac{1}{m} \right)^{m(1+x)} \cdot m^{m(1-x)}.$$

$$\left(1 - x - \frac{1}{m} \right)^{m(1-x)} \cdot \left(\frac{m - mx - 1}{m + mx - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x) :$$

$$m^{2m}, = \left(1 + x - \frac{1}{m} \right)^{m+mx}.$$

$$\left(1 - x + \frac{1}{m} \right)^{m-mx} \cdot \left(\frac{1 - x + \frac{1}{m}}{1 + x - \frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x) : 1.$$

Dafür kann, wenn m eine sehr große Zahl ist, genommen werden

$$(1+x)^{m+mx} \cdot (1-x)^{m-mx} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x) : 1.$$

Folglich wird das Verhältniß $M : M' =$

$$\frac{(1+x)^{m+mx} \cdot (1-x)^{m-mx}}{(1+x)^{m+mx} \cdot (1-x)^{m-mx}} \cdot (1-x^2)^{\frac{1}{2}} : 1$$

$$= (1-x^2)^{\frac{1}{2}} : 1.$$

Zusatz.

Zusatz. Es sey die Summe der Momente in $(a + by)^m = Q$, so ist $Q = \frac{m \cdot t \cdot M}{4} \cdot \S. 9.$ Die Sum-

me der Momente in $(a + by)^{tm} = Q'$, so ist

$$Q' = \frac{a \cdot b}{(a + b)^2} \cdot m \cdot t \cdot M' (\S. 9.) = \frac{1 - x^2}{4} \cdot m \cdot t \cdot M'.$$

$$\text{Daher } Q : Q' = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} : 1 - x^2 = 1 : (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Weil x jederzeit ein *eigentlicher Bruch* ist, so ist Q auch in jedem Fall grösser als Q' . Der allgemeine Ausdruck des Verhältnisses der Zahlen - Coëfficienten $K : K'$ nach *Moivre*, ist nur eine Näherung und giebt nicht $K = K'$ wenn $m = 0$ wird, wie es doch seyn sollte. Der letzte Ausdruck, der hier aus dem *Moivrischen* entstanden ist, nachdem $\frac{1}{m} = 0$ gesetzt worden, kann auch ohne eine merkliche Abweichung in solchen Fällen gebraucht werden, wo m nur eine mässig grosse Zahl ist.

Sonst ist auch leicht aus den Gesetzen der Coëfficienten des Binomii herzuleiten, dass

$$K : K' = \frac{m + 1 \cdot m + 2 \cdot \dots \cdot m + m \cdot x}{(m + 1 - m \cdot x)(m + 2 - m \cdot x) \dots (m + m \cdot x - m \cdot x)}$$

sey, oder umgekehrt

$$K' : K = \left(1 - \frac{m \cdot x}{m + 1}\right) \left(1 - \frac{m \cdot x}{m + 2}\right) \dots \left(1 - \frac{m \cdot x}{m + m \cdot x}\right).$$

Dieser Ausdruck kann gebraucht werden, wo m nur klein ist, und ist genau richtig.

I2.

Lehnsatz 7. In dem Polynomio $(a+by)^{tm}$ sey der Durchschnitts-Coëfficient M' , und in dem Polynomio $(b+by)^{\tau\mu}$ wo $\tau\mu = \mu(b+b)$, auch $= mt = m(a+b)$ genommen wird, sey derselbe M , so ist die Summe der Coëfficienten-Momente in dem ersten

$$Q' = \frac{a b}{(a+b)^2} \cdot m t \cdot M', \text{ und in dem andern } Q = \frac{\mu \tau M}{4}$$

(nach *Lehnsatz* 4 und 5.) Also, weil $mt = \mu \tau$, auch

$$Q' : Q = \frac{a b}{(a+b)^2} \cdot M' : \frac{M}{4}.$$

$$\text{Aber } M' = \frac{m t \cdot \overline{m t - 1} \dots \overline{m t - b m + 1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot b m} \cdot a^{am} \cdot b^{bm}.$$

$$\text{und } M = \frac{\overline{\mu \tau} \cdot \overline{\mu \tau - 1} \dots \overline{\mu \tau - \frac{1}{2} \mu \tau + 1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \tau \mu} \cdot b^{\tau \mu}.$$

Daraus erhält man

$$M' : M = \left(\frac{a}{b}\right)^{am} \cdot K' : K. \text{ in } \S. 11., \text{ und}$$

$$Q' : Q = \frac{4 a b}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{am} \cdot \frac{K'}{K}.$$

Der Factor $\frac{K'}{K}$ ist hier jedesmal ein *eigentlicher Bruch*, und so groß als in §. 11.

I3.

Noch will ich folgende Lemmata von den Coëfficienten eines Polynomii von der Form $(1+x+x^2+\dots+x^n)^m$ anfügen. Denn ob ich gleich zu der vorhandenen

Abſicht

Abficht davon keinen befondern Gebrauch machen werde, fo find fie doch anwendbar in andern Fällen. Die Beweife bleiben aber der Weitläufigkeit wegen weg.

Lehnſatz 8. In dem Polynomio $(1+x+x^2+\dots+x^n)^m$ kann 1) jeder Coëfficient für ſich auf folgende Art, im Allgemeinen, ausgedruckt werden. Die Glieder der Reihe mit ihren Coëfficienten werden nach den Potenzen von x geordnet, wobey es aber einerley iſt, ob man von der höchſten Potenz x^{nm} anfängt, und bis x^0 zurück geht, oder umgekehrt von x^0 , wie gewöhnlich, bis x^{nm} .

Es ſey z die Ordnungszahl der Coëfficienten, der *numerus termini*, der angiebt, der wie vielſte ſelbiger in der Reihe iſt, den erſten ſchon mitgerechnet.

Ferner $S^1.\overline{z}$ bezeichne die Zahl z ſelbſt, oder die *erſte Summe der Einheiten bis z* , das iſt, z ſey eine aus der Reihe der *natürlichen Zahlen*. Dann $S^2.\overline{z}$ die *Summe der natürlichen Zahlen*, oder die *zwote Summe der Einheiten*, bis z , das iſt eine *Trigonalzahl*. So weiter $S^3.\overline{z}$ eine aus der Reihe der *Pyramidalzahlen*, das iſt, die *dritte Summe der Einheiten bis z* ; und im allgemeinen $S^{m-1}.\overline{z}$, $S^m.\overline{z}$, die $(m-1)$ te und m te *Summe der Einheiten bis z* .

Noch ſetze man $n+1=p$.

Alsdenn iſt jeder Coëfficient der in der Ordnung der z te iſt, oder k ,

$$\begin{aligned}
&= S^{m-1} \cdot \overline{z - \frac{m}{1}} \cdot S^{m-1} \cdot \overline{z - p} \\
&+ \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} \cdot S^{m-1} \cdot \overline{z - 2p} - \\
&\frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot S^{m-1} \cdot \overline{z - 3p} + - \\
&\frac{m \cdot \overline{m-1} \dots \overline{m-h+1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot h} \cdot S^{m-1} \cdot \overline{z - h \cdot p}
\end{aligned}$$

fo lange fortgefetzt bis $z - hp$, wo h immer eine ganze Zahl feyn muß, entweder $= 0$, oder *negativ* wird. Die Zeichen der Theile in diefem Ausdruck wechfeln mit einander ab.

Der *erste* Coëfficient ift jedesmal 1, denn z ift $= 1$, daher $S^{m-1} \cdot 1$ auch $= 1$.

Der *letzte* Coëfficient für $z = mn + 1$ ift ebenfalls $= 1$.

Der *mittlere* Coëfficient der $\frac{mn}{2}$ -te ift zugleich der *Durchschnitts-Coëfficient*, wenn m oder n eine *gerade* Zahl ift; wenn $\frac{mn}{2}$ keine ganze Zahl ift, fo giebt es *keinen* *Durchschnitts-Coëfficienten* in der Reihe felbft, fondern diefer fällt zwifchen zween andere, und zwar in der Mitte, welche beyde von gleicher Gröfse und die *mittlern* Coëfficienten der Reihe find. Die *mittlern* Coëfficienten find auch die *größten*, wie in dem Binomio.

Einen

Einen andern Ausdruck für den Coëfficienten hat *Moiivre* gegeben, (in *Miscellan. Analyt.* L. VII. Cap. 17.) Wenn mir dieser damals eingefallen wäre, als ich den meinigen suchte, so würde ich meine Mühe gespart haben. *Moiivres* Formel kann in die hier gegebene verändert werden, und das beweiset desto mehr die Richtigkeit von beyden. Dafs er die seinige auf einem ganz andern und vielleicht nähern Wege gefunden habe, als ich die meinige, kann jedem die Vergleichung zeigen. Uebrigens war mir die meinige nicht unbequem, als ich für die *Summe der Momente der Coëfficienten* auf beyden Seiten des *Durchschnitts - Coëfficienten* die allgemeine Formel suchte.

I 4.

2) Diese letztgedachte Momenten - Summe ist, a) im Fall $m n + 1$ eine ungerade Zahl, und also nur *Ein* grösster Coëfficient in der Mitte des Polynomii da ist,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m \left(\frac{n}{2} + 1 \right)}{m + 1} \cdot S^m \cdot \frac{1}{2} m n. \\
 &- \frac{m \cdot \left(\frac{n}{2} + 1 \right) - p}{m + 1} \cdot \frac{m}{1} \cdot S^m \cdot \frac{m n}{2} - p. \\
 &+ \frac{m \cdot \left(\frac{n}{2} + 1 \right) - 2p}{m + 1} \cdot \frac{m}{1} \cdot \frac{m - 1}{2} \cdot S^m \cdot \frac{1}{2} m n - 2p - + \\
 &\frac{m \cdot \left(\frac{n}{2} + 1 \right) - \nu \cdot p}{m + 1} \cdot \frac{m \cdot m - 1 \dots m - \nu + 1}{1 \cdot 2 \dots \nu} \cdot S^m \cdot \frac{1}{2} m n - \nu p
 \end{aligned}$$

so lange als $\frac{1}{2} m n - \nu p$, oder weil $p = n + 1$, auch $\frac{1}{2} m n - \nu n - \nu = (\frac{1}{2} m - \nu) n - \nu$ noch eine *positive* Gröfse ist.

b) Für den Fall, wenn $m n + 1$ eine *gerade* Zahl ist, schreibe man statt $\frac{m n}{2}$ in der vorigen Formel, $\frac{m n + 1}{2}$, und ziehe von der so geänderten Formel am Ende noch ab $\frac{(1 + n)^m}{4}$, so hat man *die Summe der Momente für diesen zweyten Fall*.

Um mit einem Beyspiele diese Ausdrücke zu erläutern, sey $n = 5$, $m = 4$, so sind die Coëfficienten des *Polynomii* $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4$ in der Ordnung 1, 4, 10, 20, 35, 56, 80, 104, 125, 140, 146. Der letzte 146 ist der höchste mittlere, von welchem an sie wiederum in umgekehrter Ordnung abnehmen. In allen sind ihrer $m n + 1 = 21$.

Wird nun jeder multiplicirt in seinen Abstand von dem Durchschnitts-Coëfficienten, der hier auch der mittlere ist, und diese Producte in eine Summe gebracht, so bekommt man

$$Q = 10 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 20 + 6 \cdot 35 + 5 \cdot 56 + 4 \cdot 80 + 3 \cdot 104 + 2 \cdot 125 + 1 \cdot 140 = 1778.$$

Weil nun $\frac{m n}{2} = 10$, und $p = n + 1 = 6$ ist, so geben die ersten beyden Glieder der Formel für den Fall, wo $m n + 1$ ungerade ist, diese Summe schon. Die

Formel

Formel bricht hier ab, denn in dem dritten Gliede kommt $\frac{1}{2} m n - 2 p$ vor, was $10 - 12$, also negativ, ist. Die Formel giebt hier also

$$\begin{aligned} & \frac{10+4}{5} \cdot S^4 \cdot \frac{1}{10} - \left(\frac{10+4-6}{5} \right) \frac{4}{1} \cdot S^4 \frac{1}{4} \\ &= \frac{14}{5} \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{8}{5} \cdot 4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= 2002 - 224 = 1778. \end{aligned}$$

Ferner sey $m = 3$, und n wiederum $= 5$, so ist $m n + 1 = 16$, eine *gerade* Zahl, und $p = 6$ und

$$\frac{(1+n)^m}{4} = \frac{6^3}{4} = 54.$$

Die allgemeine Formel für diesen Fall giebt

$$\begin{aligned} & \frac{8+3}{4} \cdot S^3 \cdot \frac{1}{8} - \frac{11-6}{4} \cdot 3 \cdot S^3 \frac{1}{2} = 54. \\ &= \frac{11}{4} \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 54 = 261. \end{aligned}$$

Es sind aber die Coëfficienten des Polynomii $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$, bis auf die Mitte hin, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, welche durch 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 multiplicirt, Producten - Summe geben 315. In allen sind $m n + 1 = 16$ da; davon die beyden mittlern von gleicher Gröfse 27 sind. Die Summe der ersten Hälfte derselben 8 macht 108. Da nun jeder von diesen um $\frac{1}{2}$ weniger von dem *Durchschnitts-Coëfficienten*, der zwischen die beyden grössten in die Mitte fällt, entfernt ist, als in den obigen Momenten angenommen worden, so sollte jeder in $\frac{1}{2}$ weniger multiplicirt seyn,

als geschehen ist; daher muß von 315 wiederum $\frac{1}{2} \cdot 108 = 54$ abgezogen werden. Das giebt denn wie vorher 261, für Q , als das Moment der Coëfficienten.

15.

Diese Sätze von den Coëfficienten der Polynomien sind es, wodurch das *Risiko einer Casse bey Versorgungsanstalten* berechnet werden kann. Einige von ihnen sind von andern schon bewiesen worden, wie die, welche zu dem Binomio gehören, die übrigen habe ich selbst suchen müssen. Ich erinnere hiebey im Vorbeygehen, wie wichtig die *analytische Untersuchung der Polynomiorum zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten* sey. Hier wird man davon ein Beyspiel haben. Könnte man die Coëfficienten eines Polynomii $(a + bx + cx^2 + \dots + qx^n)^m$ bestimmen, was in einzelnen Fällen, wo n und m große Zahlen sind, immer noch eine mühsame Rechnung erfordert, so erheblich auch die Erleichterung ist, die Hr. Prof. *Hindenburg* in seiner vortrefflichen *Untersuchung des Polynomii* (*) gelehret hat, so würde sich die Zahl der möglichen Fälle angeben lassen, in denen mit jeder gegebenen Menge von Würfeln eine gewisse Summe geworfen werden kann. Ein Problem, um dessen

Auflösung

(*) *Infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati Historia, Leges ac Formulae.* Autore Carol. Friederic. Hindenburg. Goettingae 1779.

Auflösung man sich in besondern Fällen viele Mühe gegeben hat. Man nehme nämlich *prismatische Würfel* von so vielen Seiten, als die Summe der Coëfficienten in $a + bx + cx^2 + \dots + qx^n$, ausmacht, das ist $= a + b + c + \dots + q$. Von diesen Seiten setze man a mit 0; b mit 1; c mit 2; und so weiter q mit der Zahl n bezeichnet. Giebt es nun m solcher Würfel, womit auf *einmal* geworfen werden soll, oder nimmt man m Würfe nach einander mit *Einem* Würfel, und es ist die Frage, auf wie manche verschiedene Arten eine bestimmte Zahl von Augen, entweder auf einmal in Einem Wurf mit *mehrern Würfeln*, oder in *mehreren* wiederholten *Würfen* mit *Einem Würfel*, fallen könne, so findet man die Zahl der Fälle für die bestimmte Zahl der Augen 0, 1, 2, ... in den Coëfficienten des Polynomii $(a + bx + cx^2 + \dots + qx^n)^m = A + Bx + Cx^2 + \dots + Tx^{nm}$, die zu den Potenzen der Grösse x gehören, deren Exponenten die zu werfenden Zahlen sind. So giebt A als der Coëfficient von x^0 an, in wie vielen Fällen 0 fallen könne; B enthält die Fälle, in denen 1; C in denen 2, und so weiter, T die, in denen mn fallen können. Denn es ist klar, daß so vielmal eine Potenz von x , als x^μ aus der Multiplication von x^0, x^1, x^2 und so weiter, entstehen kann, so vielmal kann der Exponent derselben μ aus der Verbindung der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... μ , aus einem von ihnen, aus zweyen, dreyen u. f. f. gemacht werden. Und diese Fälle sind alle in dem Coëfficienten von x^μ begriffen.

Wenn

Wenn $a = 1 = b = c$ u. f. f., und $n = 5$, so hat man in $(1 + x + \dots + x^5)^m$, die Coëfficienten für die gewöhnlichen cubischen Würfel von sechs Seiten, wenn die Seiten mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet sind. Gewöhnlich fehlt die Null, und die Zahlen von 1 bis 6 sind da; aber das ändert nur bloß etwas in den Zahlen, die man werfen kann. Die niedrigste ist alsdenn nicht 0, sondern m , und die höchsten Augen sind $(n+1)m$ anstatt $n m$. Die Zahlen für die möglichen Würfe bleiben in ihrer Ordnung dieselben.

Daraus wird denn auch die *Wahrscheinlichkeit des Falls bestimmt, daß eine gewisse Summe fallen werde.*

Diese ist $\frac{B}{(a + b + \dots + q)^m}$ für die Fälle daß 1 falle;

$\frac{M}{(a + b + \dots + q)^m}$ dafür daß μ falle, u. f. w. *Der Coëfficient*

nämlich dividirt durch die Summe aller Coëfficienten ist so viel als die Summe der möglichen Fälle, in denen eine bestimmte Begebenheit erfolgt, dividirt durch die Summe aller überhaupt möglichen Fälle.

Dieser auch schon bekannte Gebrauch des Polynomii ist darum zu bemerken, weil er auf den führt, den ich nachher davon machen werde. Die Rechnung der Wahrscheinlichkeiten ward Anfangs von *Hugenius*, und nachher noch von *Jacob Bernoulli* und *Moiivre* nur auf Hazardspiele angewandt. Wäre das der Nutzen alle, so mögte man Recht haben, für *difficiles*

nugas

nugas sie zu halten, und dann auch die Beschäftigung mit dem Polynomio für eben so was. Aber weit gefehlt. Sie ist sehr erheblich und brauchbar. Sie erstreckt sich auf alle Aufgaben, wo aus der gegebenen Wahrscheinlichkeit, daß sich dieses und jenes, ein drittes, ein viertes u. s. f. in einem einzelnen Fall eräugnen werde, die Wahrscheinlichkeit von dem zu finden ist, was in mehreren Fällen zusammengenommen sich eräugnen kann. Eine allgemeine Speculation sey nur eine richtige Speculation. Sie mag vor der Hand gar nicht, oder nur auf Spielwerk, oder nur auf erdichtete Gegenstände anwendbar scheinen. Es wird sich schon finden, daß sie es auch bey wirklichen, interessanten und edlen Objecten sey, und dann für die Praxis wichtig werde.

Zweyter Abschnitt.

Anwendung dieser allgemeinen Sätze zur Berechnung des Risico bey Versorgungsanstalten.

16.

Erster Satz. *A kaufe eine Rente, die vom Leben oder Tode einer oder mehrerer Personen abhängt. Man setze, der wirkliche Erfolg könne so seyn, daß die Casse gar nichts für diese Rente zu zahlen habe, (oder der wirkliche Werth könne 0 seyn.) Aber es sey auch möglich, daß sie die GröÙe AB (Fig. 2.) habe, und dieß sey ihr möglich größter Werth. Es werde AB in m gleiche*

gleiche Theile getheilet, und die wirklich zu zahlende Rente könne alle Zwischenwerthe haben, welche auf die gemachten Abtheilungen fallen, das ist, Aa , Ab , Ac , AM , An , AO u. s. f. seyn.

Die Wahrscheinlichkeit für alle diese einzelnen Werthe sey gegeben. Es sey möglich, daß sie in a Fällen Nichts sey; in b Fällen Aa , oder 1 , in c Fällen, 2 , oder Ab sey, und so ferner.

Man mache das Polynomium $a + bx + cx^2 + \dots + hx^\mu + \dots + tx^n$, so drücken die Coefficienten $a, b, c, \dots, t$ die Zahl der Fälle aus, in denen die Werthe so groß seyn können, als die Exponenten der Grösse x . Die Summe aller möglichen Fälle ist die Summe aller Coefficienten. $(a + b + c + \dots + t)$ und die Wahrscheinlichkeit, daß der wirkliche Werth der Rente μ seyn werde, ist
$$= \frac{h}{a + b + \dots + t}.$$

Dies ist nun alles aus dem obigen von selbst klar.

17.

Zweyter Satz. Es sey $\frac{0 \cdot a + 1 \cdot b + 2 \cdot c + \dots}{a + b + c + \dots + t} = \mu = AM$, so ist AM der mittlere oder der Durchschnitts-Werth der Rente.

Ferner. Wenn dieser Werth μ für die Rente bezahlt wird, so ist der größte mögliche Gewinn, den die Casse haben kann, AM oder μ , der alsdenn ihr zufällt, wenn
der

der wirkliche Werth der Rente *Nichts* ist, wenn nämlich der Rentenier gleich nach gekaufter Rente stirbt. *Der grösste an sich mögliche Verlust* ist $AB - AM = n - \mu$, den sie leiden kann, und wirklich leidet, wenn der Rentenier das höchste Lebensziel erreicht.

18.

Dritter Satz. Dieser an sich mögliche Gewinn und Verlust ist von dem zu erwartenden Gewinn und Verlust unterschieden.

Wenn der wirkliche Werth der Rente Ah ist, so ist der Gewinn der Casse hM . Es sey $AM = \mu$ eine ganze Zahl, so ist $hM = 1$. Wenn jener Werth Ac wird, so ist der Gewinn $\mu - Ac$, und wenn der wirkliche Werth o ist, so ist der Gewinn μ .

Imgleichen wenn der wirkliche Werth der Rente über μ fällt, so hat die Casse Verlust, und dieser ist $1, 2, \dots n - \mu$ je nachdem jener wirkliche Werth $An, Ao \dots AB$ wird.

Wenn der *mittlere Werth* μ keine ganze Zahl ist, so fällt der Punct M auch nicht auf einen der obigen Theilungspuncte der Linie AB , und alsdenn ist auch der Gewinn nicht $= 1$, wenn der wirkliche Werth auf Ah fällt, sondern nur hM . Eben so ist der Verlust nicht $= 1$, wenn der Werth auf An fällt, sondern nur nM . In diesem Fall ist der Gewinn $hM, hM + 1, hM + 2, u. s. f.$
bis

bis $A M$, und der *Verlust*, $M n$, $M n + 1$, $M n + 2 \dots M B$, je nachdem die wirklichen Werthe $A n$, $A o$, $\dots A B$ sind.

Wird nun jeder *mögliche Gewinn* und *Verlust* in seine *Wahrscheinlichkeit* multiplicirt, so ist die *Summe dieser Producte*, bey den Gewinnen, so groß als die *Summe der Momente der Coëfficienten des Polynomii*, die vor dem *Durchschnittsgliede* vorhergehen, (jeden Coëfficienten nämlich in seine Entfernung von dem Durchschnittsgliede multiplicirt). Diese *Momenten - Summe* werde dividirt durch die *Summe aller Coëfficienten*; so hat man den zu *erwartenden Gewinn* (den mittlern Gewinn, den Gewinn im Durchschnitt). Die Summe der Momente der *nachfolgenden* Coëfficienten ebenfalls durch die Summe aller Coëfficienten dividirt, giebt den zu *erwartenden Verlust* (den mittlern Verlust). Beydes wird auch ausgedrückt durch die *Erwartung des Gewinns*, und die *Erwartung des Verlustes*.

Dieser Satz ist daraus klar. Man setze das Polynomium sey $a + b x + c x^2 + \dots + l x^{\mu - h M} + h. x^{\mu} + o x^{\mu + M n} + p x^{\mu + M n + 1} + \dots + t x^n$, wo die Exponenten von x , nach und nach, $A a$, $A b$, $\dots A h$, $A M$, $A o \dots A B$ sind, und $\mu = A M$ ist. Fällt M nicht selbst auf einen von den Theilungspuncten, oder ist μ keine ganze Zahl, so ist $h n = h M + M n = 1$; und dann ist in dem Polynomio der Coëfficient h , in $h x^{\mu} = \text{Null}$.

In

In jedem Fall ist $h M$ die Gröſſe des Gewinns $h M$, multiplicirt in 1, als die Zahl der möglichen Fälle, in denen solcher ſtatt findet. Eben ſo auch $b. a M$ ein ſolches Product, und $a. A M$ ein ſolches, wo $A M$ der größte mögliche Gewinn iſt. Dieſe Producte ſind Momente der vor h vorhergehenden Coëfficienten, jeden in ſeine Entfernung von dem Gliede $h x^n$ multiplicirt.

Weil nun die Zahl aller möglichen Fälle $= a + b + + q = S$, ſo wird die Summe jener Momente, jedes Moment dividirt durch die Summe aller möglichen Fälle, die Summe von Producten ſeyn, deren jedes die Gröſſe eines jeden Gewinns enthält in ſeine Wahrscheinlichkeit multiplicirt,

$$= h M. \frac{1}{S} + + \frac{a M. b}{S} + \frac{A M. a}{S}.$$

Die Summe dieſer Gewinne, jedweden in ſeine Wahrscheinlichkeit multiplicirt, macht den zu *erwartenden ganzen Gewinn* aus. Bey dem wirklichen Erfolg kann zwar nur *Einer* von dieſen Gewinnen bey *Einer* Perſon erhalten werden; aber alſdenn wird ſelbiger auch ganz erhalten. Die Erwartung von Einem ganzen aus den verſchiedenen Gewinnen, oder mit andern Worten, der zu erwartende *Eine* unbeſtimmte Gewinn, beſteht aus den in der obigen Summe enthaltenen Theilen, und iſt dieſen zuſammengenommen gleich.

Die *Entfernungen von dem Durchschnittsgliede* Mh, Mb, Ma, MA , in Zahlen ausgedrückt, haben

II. Theil.

K

zur

zur *Einheit* eine von den gleichen Abtheilungen der Linie A B. Die Summe dieser Theile ist n , daher jene Einheit $\frac{A B}{n}$. Enthält A M solcher Theile r , und M B ihrer q , so ist $n = r + q$. Daher kann die Einheit in der Summe der Gewinne auch durch $\frac{A M}{r}$ ausgedruckt werden, wenn A M der grösste mögliche Gewinn ist.

Es erhellet auf dieselbe Art, dafs wenn die Momente der *nachfolgenden* Coëfficienten, zwischen $h x^\mu$ und $t x^n$, eben so genommen, und durch S dividirt werden, so komme der zu *erwartende Verlust* heraus, worinn die Einheit durch $\frac{M B}{q}$ ausgedruckt werden kann, da denn M B der *grösste mögliche Verlust* ist.

19.

Zusatz. Wenn $a = b = c = t = 1$ oder alle Coëfficienten gleich und $= 1$ sind, und $n = S$, welches der Fall ist, wenn mit einem gewöhnlichen Würfel von sechs Seiten mit den Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 bezeichnet, geworfen werden sollte, so ist

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5}{6} = \frac{(S+1)S}{2 \cdot 6} = 2 \frac{1}{2}$$

das ist, der *mittlere Werth eines Wurfs*. Nun ist der *zu erwartende Gewinn*, der in drey Fällen entsteht, wenn 0, 1, 2, geworfen wird,

$$= \frac{\frac{1}{2}}{6} + \frac{1 \cdot (1 + \frac{1}{2})}{6} + 1 \cdot \frac{2 \frac{1}{2}}{6} = \frac{4 \frac{1}{2}}{6} = \frac{3}{4}$$

Und

Und der zu erwartende Verlust, der bey den Würfeln, 3, 4, 5 statt findet, ebenfalls

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{6} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{6} + \left(3 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{6} = \frac{3}{4}.$$

Es ist überhaupt (nach Lehnatz 1.) der zu erwartende Gewinn dem zu erwartenden Verlust gleich, wenn der mittlere Werth bezahlet worden ist.

20.

Die Grösse des zu erwartenden Verlustes ist hier die Grösse des Risico der Casse. So viel nämlich wagt die Casse zu verlieren, wogegen sie eben so viel wieder gewinnen kann. Beydes gegen einander aufgerechnet giebt Nichts. Allein davon, was sie aufs Spiel setzet, was sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewinnen oder verlieren kann, ist die Rede, wenn man saget, daß sie so oder so viel risquire.

21.

Dritter Satz. Wenn $AB = AM + MB = n$ dieselbe Grösse behält, und auch die Summe aller möglichen Fälle, $a + b + \dots + t = S$ dieselbige bleibt, so wird das Risico der Casse in dem Falle am grössten seyn, wenn $a = \frac{S}{2} = t$, und alle übrige Coëfficienten $= 0$ sind, und $MB = \frac{AB}{2} = \frac{n}{2}$ genommen wird, (nach Lehnatz 3. §. 6.)

In diesem Fall bekommt das Polynomium die Form des Binomii $a + ax^n$, und es wird $\mu = \frac{n \cdot a}{2a} = \frac{n}{2}$.

Das *größte Risiko*, so groß als das Moment der Coefficienten dividirt durch die Summe aller Coefficienten, ist

$$= \frac{n}{2} \cdot \frac{a}{2a} = \frac{n}{4} = \frac{A B}{4}, \text{ und in diesem Fall} \\ = \frac{A M}{2} = \frac{M B}{2}.$$

Das ist; „Man berechnet den zu erwartenden Verlust, oder das *Risiko* nach der Voraussetzung, daß es „nur zwey Fälle gebe, *Einen für den größten Gewinn*, „und *Einen für den größten Verlust*. Diese beyden „Fälle werden aber auch als *gleich wahrscheinlich* angesehen.“

Rey einem Wurf mit einem gemeinen Würfel von sechs Seiten, die durch 0, 1, 3, 4, 5, bezeichnet sind, ist der *mittlere Werth des einzelnen Wurfs* $2\frac{1}{2}$, und der zu *erwartende Verlust* oder das *Risiko* $\frac{3}{4}$. §. 19. Das *größte Risiko* aber wird gefunden, wenn man annimmt, der Würfel habe nur zwey Seiten, eine mit 0, die andere mit der Zahl 5 bezeichnet, oder wenn sechs Seiten bleiben sollen, daß drey davon 0, und drey 5 haben. Wenn jenes ist, so sind zwey mögliche Fälle, und in $(a + ax^n)$ ist $a = 1$, $n = 5$. Der Durchschnittswerth eines Wurfs ist wiederum $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, der *äußerste mögliche Verlust* $= 2\frac{1}{2}$, gleich dem *äußersten möglichen Gewinn*. Das *größte Risiko* also $= \frac{5}{4}$.

Sind

Sind sechs Seiten am Würfel, so ist $n = 5$, $a = 3$.

Aber wiederum das *größte Risiko* $= \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{5}{4}$.

Sind die Seiten der Würfel mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, bezeichnet, so ist der *mittlere Werth* eines Wurfs $= 6 \cdot \frac{6+1}{2 \cdot 6} = 3 \frac{1}{2}$. In dem Polynomio $x + x^2 + \dots + x^6$ gehört der Durchschnitts-Coëfficient zu dem Gliede, worinn $x^{\frac{7}{2}}$ vorkommen sollte, und ist $= 0$. Die Entfernungen der wirklich vorhandenen Coëfficienten von jenen sind $\frac{1}{2}$, $1 \frac{1}{2}$, $2 \frac{1}{2}$. Die Zahl aller Fälle 6. Daher die Momente der Coëfficienten auf einer Seite des Durchschnitts-Coëfficienten, dividirt durch die Summe aller, $= \frac{1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot \frac{5}{2}}{6} = \frac{3}{4}$. Dieß ist das *eigentliche Risiko*, so groß wie in dem vorigen Fall.

Das *größte* aber ist $\frac{6-1}{4} = \frac{5}{4}$, auch wie in dem vorhergehenden Fall.

22.

Zusatz. Die Größe $A B = n$, wird erkannt aus der Summe der *äußersten Werthe des Verlustes und des Gewinns*, $A M + M B$. Diese Summe $A B$ ist auch die *Differenz zwischen dem, was in den beyden äußersten Fällen erfolgt*. Sind nun diese äußersten Größen einander gleich, so können sie bey der Berechnung des größten Risiko auch für *gleich wahrscheinlich* angenommen werden.

Sind sie aber nicht gleich, so kann bey der Voraussetzung, daß ihre Wahrscheinlichkeit gleich groß sey, das *größte Risiko*, $= \frac{A B}{4}$, größer ausfallen als $M B$, oder größer als $A M$; das ist, es kann größer werden als der an sich mögliche Verlust ist. Dieß ist wieder die Natur der Sache. Auch kann auf Seiten des Käufers der Rente oder des Einsetzers, sein Risiko zu verlieren nicht größer seyn, als sein größter möglicher Verlust, das ist, als der größte mögliche Gewinn der Casse ist. Da nun das Risiko, wenn die wahre mittlere GröÙe bezahlt ist, auf beyden Seiten gleich ist, so muß es kleiner seyn als das äußerste des Gewinns sowohl als des Verlustes. Daraus folgt, daß die Berechnung des größten Risiko in diesem Fall, auf einer Seite wenigstens, allzuweit von der Wahrheit abweichen würde. Und hieraus ergibt sich folgender Satz.

23.

Vierter Satz. Wenn $A M$ und $M B$ merklich verschieden sind, $A M$ für den mittlern Werth der Rente genommen, so müssen die Wahrscheinlichkeiten jener äußersten Fälle in umgekehrten Verhältniß mit ihren GröÙen genommen, und das größte Risiko aus der Momentensumme in dem Binomio $a + b x^n$, oder, wenn $A B = n$ für die Einheit gerechnet wird, aus den Momenten in $a + b x$, worinn $a + b = 1$ zu setzen ist, berechnet werden.

Und

Und dann ergibt sich das Verfahren von selbst. Gegeben sind MB und AM. 1) Man nehme $a : b = 1 + x : 1 - x$ in dem Verhältniß MB : AM.

2) Man nehme für das Binomium $a + bx$ den Exponenten des Durchschnitts-Coëfficienten $\mu = \frac{b}{a+b} = \frac{1-x}{2}$, und suche die Entfernung beyder Coëfficienten a und b , von diesem. Die Entfernung des a ist $= \frac{1-x}{2}$, und des b , $= 1 - \frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2}$.

3) Daraus wird die Summe der Momente der Coëfficienten auf einer Seite $= b \left(\frac{1+x}{2} \right)$; und auf der andern Seite $= a \left(\frac{1-x}{2} \right)$. Also auf beyden Seiten $= \frac{1+x}{2} \cdot \frac{1-x}{2} \cdot AB = \frac{1-x^2}{2} \cdot AB$.

4) Die Summe der Momente dividirt durch 2 giebt das größte Risiko $= \frac{1-x^2}{4} \cdot AB$.

24.

Zusatz. Es mag AM oder MB, das ist, der an sich mögliche größte Gewinn oder Verlust der Casse, der größte von beyden seyn, so findet man das größte Risiko nach der letzten Formel, wenn für x der Quotient gesetzt wird, der durch die Division der Differenz zwischen dem größten an sich möglichen Gewinn und

Verlust, (positiv sie genommen) mit der Summe von beyden herauskommt. Es sey $AM + MB = S$, ihre positive Differenz D , so ist (nach Satz 4. §. 23.) zu nehmen, $S : \frac{1}{2} D = a + b : x = 2 : x$. Daher $x = \frac{D}{S}$, und

$$\frac{1 - x^2}{4} \cdot S = \frac{S}{4} \left(1 - \frac{D^2}{S^2} \right) = \frac{(S + D) \cdot (S - D)}{4 S}, =$$

dem größten Risiko.

25.

Ex. 1. Eine Person, 30 Jahr alt, kaufe eine *Leibrente* für ihren baaren Werth, wie hoch geht das Risiko der Casse? Der Werth der Rente ist nach *Süßmilchs* Tafel, und nach dem 4 Procent Zinsfuß, 15, 0847. Dieß ist zugleich der *größte mögliche Gewinn der Casse*, wenn der Rentenier gleich nach dem Ankauf der Rente stirbt. Dagegen kann selbiger auch das höchste Lebensziel, 96 Jahre, erreichen, und in diesem äußersten Fall verliert die Casse die Zeitrente auf 66 Jahr, als die Altersergänzung, weniger dem Einsatz, das ist $23, 1218 - 15, 0847 = 8, 0371$. Die Summe des äußersten Gewinns und Verlustes ist also 23, 1218, ihre Differenz aber $15, 0847 - 8, 0371 = 7, 0476$. Die Summe und die Differenz zusammen $S + D = 30, 1694$; $S - D = 16, 0742$. Das größte Risiko also

$$= \frac{30, 1694 \cdot 16, 0742}{4 \cdot 23, 1218} = 5, 2 \dots$$

Ex. 2. Ein Ehemann von 30 Jahren kaufe eine *Wittwenrente* 1 für seine Frau von 20 Jahren, und zahle

zähle dafür den baaren Werth nach *Süßmilchs* Tabelle und 4 Procent-Fuß, d. i. 4, 1194. Dieß ist der größte mögliche Gewinn der Casse, der erfolgt, wenn die Frau vor dem Manne stirbt. Da nun auch hingegen der Mann gleich nach dem Ankaufe der Rente sterben, und dann die Frau das höchste Lebensziel als Wittwe erreichen kann, so ist der größte mögliche Verlust so groß als eine Zeitrente auf 76 Jahr, weniger 4, 1194; $= 23, 7312 - 4, 1194 = 19, 6118$. Die Summe von beyden S ist 23, 7312. Die Differenz $D = 15, 4924$. Also $S + D$ zusammen $= 39, 2236$; und $S - D = 23, 7312 - 15, 4924 = 8, 2388$. Daher $\frac{39, 2236 \cdot 8, 2388}{4 \cdot 23, 7312} = 3, 4$, dem *größten Risiko* der Casse.

26.

Zusatz 1. Die *allgemeinen Auflösungen* für solche *Aufgaben* sind folgende:

1) Bey der *gekauften Leibrente* ist der *mögliche größte Gewinn* der Casse selbst dieser Werth baar $= \lambda \bar{a}$.

Der *größte mögliche Verlust* ist $= \int \frac{1}{r^x} - \lambda \bar{a}$ wenn x die *Altersergänzung* des Renteniers ist.

Beide zusammen $S = \int \frac{1}{r^x}$.

Ihre *Differenz* $D = \pm \int \frac{1}{r^x} \mp 2 \lambda \bar{a}$

$S + D = 2 \int \frac{1}{r^x} - 2 \lambda \bar{a}$, oder auch $+ 2 \lambda \bar{a}$;

$S - D = 2 \lambda \bar{a}$, oder $2 \int \frac{I}{r^x} - 2 \lambda \bar{a}$. In jedem

$$\text{Fall also } \frac{(S+D) \cdot (S-D)}{4 \cdot S} = \frac{4 \left(\int \frac{I}{r^x} \cdot \lambda \bar{a} - (\lambda \bar{a})^2 \right)}{4 \int \frac{I}{r^x}}$$

$$= \lambda \bar{a} - \frac{(\lambda \bar{a})^2}{\int \frac{I}{r^x}}.$$

Dieser Ausdruck enthält eine kurze Methode, das Risiko zu berechnen.

2) Wenn eine *Wittwenrente* gekauft ist, so sey der *Einsatz* oder baare Werth derselben E ; die Zeitrente auf die Altersergänzung des Renteniers, das ist hier, der Frau, wiederum $\int \frac{I}{r^x}$, so ist auch eben so der *größte Gewinn*

der Casse $= E$, der *größte Verlust* $= \int \frac{I}{r^x} - E$.

Also $S = \int \frac{I}{r^x}$ und $D = \int \frac{I}{r^x} - 2 E$. Daher

$S + D = 2 \left(\int \frac{I}{r^x} - E \right)$, und $S - D = 2 E$.

Diese beyden Werthe wechseln um, wenn $\int \frac{I}{r^x} - 2 E$ negativ ist.

$$\text{Folglich } \frac{(S+D) \cdot (S-D)}{4 \cdot S} = \frac{4 \left(E \cdot \int \frac{I}{r^x} - E \cdot E \right)}{4 \cdot \int \frac{I}{r^x}}$$

$$= E - \frac{E^2}{\int \frac{I}{r^x}}.$$

27.

Zusatz 2. Ist es eine *Eherente*, oder Verbindungsrente, welche gekauft ist, so sey ihr baarer Werth $\lambda \overline{a b}$, und $\int \frac{I}{r^n}$ sey eine Zeitrente auf die Altersergänzung der ältesten verbundenen Person. Das *größte Risiko* ist als-

$$\text{denn} = \lambda \overline{a b} - \frac{(\lambda \overline{a b})^2}{\int \frac{I}{r^n}}.$$

Ist der Mann 30 Jahr alt, die Frau 20, so ist $\lambda \overline{a b} = 12,6711$, und das *größte Risiko*

$$= 12,6711 - \frac{(12,6711)^2}{23,1218} = 12,6711 - 6,95 = 5,7.$$

28.

Ex. 3. Erwirbt sich derselbe Ehemann dieselbe *Wittwenrente* durch jährliche aber vor auszuhaltende *Beyträge*, so ist der *größte mögliche Verlust* der *Casse*, die Zeitrente auf die Altersergänzung der Frau von 20 Jahren, das ist auf 76 Jahre (23,7312), weniger dem ersten empfangenen *Beytrag* 0,3013. Der *größte mögliche Gewinn* kommt so heraus. Die Ehe kann so lange dauern, als die Altersergänzung des Mannes, der hier die älteste der verbundenen Personen ist, das ist 66 Jahr, und alsdenn noch die Frau vor dem Mann absterben. In diesem Fall empfängt die *Casse* jährlich 0,3013 auf 66 Jahr, wogegen sie nichts ausgiebt, $= 1,04(0,3013 \cdot 23,1218) = 7,2453$. Dies ist der *größte mögliche Gewinn*.

Gewinn. Beyde zusammen machen $S = 30,6752$.
Ihre Differenz $D = 16,1846$. Also $S + D = 46,8598$
und $S - D = 14,4906$.

$$\text{Daher } \frac{46,8598 \cdot 14,4906}{4 \cdot 30,6752} = 5,53.$$

Die *allgemeine Auflösung* solcher Aufgaben ist folgende. Die *Ergänzung des Alters* bey dem Manne sey m , und bey der Frau n , der jährliche Beytrag C , der *größte mögliche Verlust der Casse* $\int \frac{I}{r^n}$, wenn nicht praenumerirt wird; der *größte mögliche Gewinn* ist $C \cdot \int \frac{I}{r^m}$.

$$\text{Daher } S = \int \frac{I}{r^n} + C \cdot \int \frac{I}{r^m}; \quad D = \int \frac{I}{r^n} - C \cdot \int \frac{I}{r^m}.$$

$$\text{Und } \frac{(S+D)}{4} \cdot \frac{(S-D)}{S} = \frac{2 \cdot \int \frac{I}{r^n} \cdot 2 \cdot C \cdot \int \frac{I}{r^m}}{4 \cdot \left(\int \frac{I}{r^n} + C \cdot \int \frac{I}{r^m} \right)}$$

$$= \frac{C \cdot \int \frac{I}{r^n} \cdot \int \frac{I}{r^m}}{\int \frac{I}{r^n} + C \cdot \int \frac{I}{r^m}}.$$

Wird *der erste Beytrag praenumerirt*, so ist der *größte Verlust der Casse* $\int \frac{I}{r^n} - C$; der *größte Gewinn*

$$C \cdot \int \frac{I}{r^m} + C. \quad \text{Also } S = \int \frac{I}{r^n} + C \cdot \int \frac{I}{r^m}, \quad \text{und}$$

$$D = \int \frac{I}{r^n} - C \cdot \int \frac{I}{r^m} - 2C$$

Daher

$$\text{Daher } \frac{(S+D) \cdot (S-D)}{4 \cdot S} = \frac{\left(\int \frac{I}{r^n} - C\right) \cdot \left(C \cdot \int \frac{I}{r^m} + C\right)}{\int \frac{I}{r^n} + C \cdot \int \frac{I}{r^m}}$$

das *größte Rifico*.

29.

Hierbey kann es Aufmerksamkeit erregen, daß ein Unterschied in dem größten Rifico bey dem *Contributionsfuß* und dem *Capitalfuß* Statt findet. Dieser würde nun wohl noch kleiner ausfallen, wenn man das eigentliche, oder wahre Rifico berechnen könnte. Denn die Voraussetzung, nach der man alle Zwischenwerthe, welche die versicherte Rente haben kann, auf die äußersten bringt, kann in einem Fall mehr von dem genauen Werth abweichen, als in dem andern. Gleichwohl ist aus der Natur der Sache klar, daß bey den *Beyträgen* etwas mehr gewaget werde. Wer Beyträge nimmt, wagt erstlich so viel, als ein anderer, der sich die baaren Werthe zahlen läßt, das ist, in dem Fall, wo der Mann 30, die Frau 20 Jahr alt ist, aufs höchste 3, 4 für die Rente 1. (nach §. 25.) Aber er wagt noch einmal etwas, indem er statt des baaren Werths der Wittwenrente eine jährliche Rente von der Gröfse des Beytrags empfängt, die auf die Ehezeit dauert, das ist, er waget noch so viel mehr, als bey einer Eherente gewaget wird. Dieß würde in dem gegenwärtigen Fall seyn $5, 7. 0, 30 \cdot 13 = 1, 72$. (§. 27.) Also beydes zusammen

5, 12, das ist, nahe so viel als vorher. Es kann nicht ganz so gerechnet werden, weil diese beyden Fälle nicht von einander unabhängig und getrennt sind. Es wird ein wenig mehr gewagt, wenn das beydes bey *demselben Paar* vorkommt. Denn der größte Verlust bey der Wittwenrente fällt zusammen mit dem größten Verlust bey der Eherente, wenn nämlich der Mann gleich nach dem Ankauf der Rente stirbt. Die Voraussetzung, nach der man das Maximum in dem Risiko findet, hat doch in den oben berechneten Exempeln das Risiko sehr nahe in gleichem Verhältniß vergrößert. Man kann sie also mit Sicherheit gebrauchen:

Dies *größere Risiko bey den Beyträgen hat auch eine größere Erwartung zu gewinnen*, die alleinal jenem gleich ist, zur Folge. Dennoch entsteht daraus ein größerer Werth der Summe, die von Seiten des Entrepreneurs aufs Spiel gesetzt wird. Aber wenn man dagegen bedenket, daß bey *ausgesuchten Gesellschaften* der Vortheil, der aus der *mindern Sterblichkeit entspringet*, und auf die Seite der Casse fällt, größer ist bey Beyträgen, als bey Einfätzen, (§. 69. der *Abhandl. von der Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften*), so ergiebt sich, daß die Casse, ob sie gleich etwas mehr waget, bey den Beyträgen, dennoch auch mehrere Vortheile voraus habe und also nicht schlimmer sondern besser daran sey, als bey den Einfätzen, wenn man nämlich sonst als Regel voraussetzet, die Casse solle eben so wenig

etwas

etwas vor den Interessenten, als diese vor jener voraus haben. Denn es ist ein anderes, wenn der Entrepreneur oder die Casse so etwas nach Billigkeit verlangen kann. Diese Vortheile wachsen denn vielleicht nicht bey beyden Versicherungsarten in dem gleichen Verhältniß mit dem größten Risiko. Das Resultat daraus ist, daß ein Entrepreneur, der nicht die Absicht hat, zu spielen, der die etwanigen Vortheile aus der geringern Sterblichkeit wieder weggeben, nur auch nichts verlieren will, sondern bloß einen guten Zweck befördern, daß der etwas mehr Bedenken haben könne, die Garantie zu übernehmen bey dem Beytragsfuß, als wenn baare Einfätze gezahlt werden. Eine andere Frage ist es, ob die Gesellschaft, wenn sie selbst die Garantie leistet, nicht Gründe finde, den Beytragsfuß vorzuziehen? Das wird sich unten in einer der folgenden Abhandlungen zeigen.

30.

Das *größte Risiko der Casse bey einer einzelnen Rente ist zugleich das Risiko des Interessenten*. Wer eine Rente kauft, erhält eine Versicherung auf sie, die den Werth hat, den er dafür erlegt, oder doch nicht wohlfeiler gelassen werden kann. In so weit bekommt er sogleich für sein Geld den Werth desselben. Allein in so ferne als es ungewiß ist, ob nicht bey dem Erfolg diese Ausgabe umsonst für ihn oder die Person, die er versorgen will,

will, seyn werde, in so ferne wird etwas von ihm gewaget, oder aufs Spiel gesetzt. Das ist aber denn ein Spiel, was so lange dauret, als seine Theilnehmung an dem Institut, und ist ein gutes wohlthätiges Spiel, wobey nur verloren wird, wenn es zu dem Zweck, den man hat, keines Gewinns bedarf, und dann nur zum Besten anderer verloren wird. Gleichwohl ist es doch vernünftig, daß jeder, der sich darauf einläßt, Rechnung mache, ob er unter seinen Umständen, so viel wagen könne und dürfe, als sein Risiko beträgt? Das größte Risiko ist das, was er aufs äußerste wagt. Davon kann er denn immer noch etwas abziehen.

31.

Die Art, das größte Risiko durch die Anwendung der obigen allgemeinen Lehrsätze zu berechnen, ist bey einzelnen Renten ausführlich gezeigt, um in dem folgenden desto kürzer seyn zu können. Die Richtigkeit der nachfolgenden Sätze wird nun für sich selbst einleuchten.

Fünfter Satz. Mehrere Personen m kaufen, jede eine gleiche Rente; das Alter der Personen, von deren Leben oder Tode die Rente abhängt, soll gleich seyn, (nicht bloß der Werth der Renten für sich). Es sey der größte mögliche Gewinn der Casse auf eine einzelne solche Rente, AM , und der an sich mögliche Verlust MB . (Fig. 2.).

Die

Die Linie A B enthalte wiederum n gleiche Theile, und die wirklichen Werthe der einzelnen Rente bey dem Erfolg können fallen auf A, auf a, b, c , u. f. f. Der *mittlere Werth* ist A M.

Die n Theile können von A gezählet werden, oder auch von M an. Fällt der wirkliche Werth auf A, so ist er von A an gerechnet $= 0$, und die folgenden Werthe sind $1, 2 \dots n$. Setzet man bey M den Werth 0 , so wird solcher *negativ* in A, und zwischen A und M; aber *positiv* zwischen M und B.

Der *an sich mögliche Gewinn der Casse bey der Zahl der Rente m* ist $= m. A M$.

Der *an sich mögliche Verlust* $= m. M B$.

Die *Zahl der möglichen Fälle*, in denen nach der Mortalitätstafel die einzelne Rente die verschiedenen Werthe haben kann, soll durch die Coëfficienten des Polynomii $(a + b x + \dots + t x^n) = \Pi$ gegeben seyn; worinn a die Zahl der Fälle ist, in denen die Rente auf A selbst fällt, b die Zahl derer, in denen sie auf a , das ist um $A a = \frac{1}{n}. A B$ gegen B fällt, und so ferner, so daß die Exponenten der Potenz der veränderlichen Gröfse x die wirklichen Werthe angeben, die in so vielen Fällen, als die Coëfficienten ausdrücken, möglich sind.

Die Zahl aller möglichen Fälle ist die Summe aller Coëfficienten $a + b + \dots + t$.

Es sey ferner $(a + bx + \dots + tx^n)^m = \Pi^m = A + Bx + Cx^2 + \dots + Mx^{m\mu} + \dots + Tx^{mn}$, und

$$\mu = \frac{b + 2c + 3d + \dots + nt}{a + b + c + \dots + t} \text{ wobey der Coëfficient } M$$

in $Mx^{m\mu}$ auch Null seyn kann. Dann suche man die *Summe der Momente der Coëfficienten*, welche in Π^m auf das Glied $Mx^{m\mu}$ folgen. Jeder Coëfficient wird nämlich multiplicirt in seinen Abstand von dem *Durchschnitts-Coëfficienten* M, und dieser Abstand wird aus dem Exponenten der Potenz von x berechnet, z. B. der Abstand des Coëfficienten T von M ist $mn - \mu m = m(n - \mu)$.

Diese *Momenten-Summe dividirt durch die Summe aller möglichen Fälle* in Π^m , welche $(a + b + \dots + t)^m$ ist, giebt das *eigentliche Risiko der Casse*.

Dieser Satz ist aus dem obigen von selbst klar. Man ziehe nun eine Linie A' B' (Fig. 3.) = m. AB, in mn gleiche Theile getheilt, so enthält A' M solcher Theile μm , dergleichen n in AB (Fig. 2.) sind, und alsdenn ist die Einheit $\frac{AB}{n}$. Die wirklichen Werthe der m Renten zusammen genommen, können fallen in A' und B', diess sind die äußersten Werthe, und dazwischen auf alle Theilungspuncte der Linie A' B'. Die Coëfficienten im Polynomio Π^m drücken die Zahl der möglichen Fälle für jeden dieser Werthe aus; M in $Mx^{m\mu}$ die Zahl der Fälle, in denen der Werth auf A' M fällt. Gehört aber M nicht mit zu den Theilungspuncten, wie in dem Fall, wenn $m\mu$ keine ganze Zahl ist, so ist $M = 0$.

32.

Sechster Satz. Ist in den einzelnen Renten der größte mögliche Gewinn dem größten möglichen Verlust gleich, oder $AM = MB$ (Fig. 2.) so sey M der größte Terminus in dem Binomio $(1 + 1)^m$, oder der größte Coëfficient in dem Binomio $(1 + x^n)^m$; und m eine gerade Zahl, so wird das größte Risiko der Casse bey m Renten seyn, $= \frac{m M}{4 \cdot 2^m} \cdot A B$.

Beweis. Denn wenn man statt des Polynomii $(a + b x + \dots + t x^n)^m$ das Binomium $\alpha^m (1 + x^n)^m$ nimmt, worinn $2 \alpha = a + b + \dots + t$ ist, so ist die Summe der Momente der Coëfficienten auf einer Seite des Durchschnitts. Coëfficienten in $\alpha^m (1 + x^n)^m$ größer als in dem ersten Polynomio, (nach Lemma 3. §. 7.) und diese Momenten - Summe in $\alpha^m (1 + x^n)^m$, oder Q ist alsdenn $= \alpha^m \cdot \frac{m M}{4} \cdot n$. (Lehrsatz 4. §. 8.). Die Entfernungen der Coëfficienten haben hier zur Einheit n . Daraus folgt, daß auch $\frac{Q}{(2 \alpha)^m} = \frac{Q}{(a + b + \dots + t)^m}$ in diesem Fall am größten ist, also das größte Risiko $= \frac{m M}{4 \cdot 2^m} \cdot n = \frac{m M}{4 \cdot 2^m} \cdot A B$.

Zusatz 1. In dem Binomio $\alpha^m (1 + x^n)^m$ kann y statt x^n gesetzt werden. Alsdenn ist $Q = \frac{m M}{4} \cdot \alpha^m$, und es ist $n = 1$ genommen.

L 2

Es

Es fallen nämlich bey der Voraussetzung die Werthe der m Renten zusammen in der Linie $A' B'$ nur an solchen Stellen, die um $n = AB$ von einander entfernt sind. Für die Zwischenwerthe fallen die Coëfficienten aus. Bey der Substitution des Binomii $\alpha (1+x^n)$ statt des Polynomii $a + bx + \dots + tx^n$ bey den einzelnen Renten, hatte man alle Werthe, ausser den äußersten, wegfallen lassen.

Da hier $AB = 2 AM = 2 MB$, so ist das größte Risiko auch $= \frac{m M}{2^m} \cdot \frac{M B}{2}$.

33.

Zusatz 2. Wenn die Zahl der Renten *ungerade* ist, $m - 1$, so ist die Momenten-Summe der Coëfficienten auf beyden Seiten des Durchschnitts-Coëfficienten (der alsdann $= 0$ ist, und zwischen den beyden mittlern größten Coëfficienten des Binomii $(1+x)^{m-1}$ fällt,) $= \frac{m \cdot M'}{4}$, wenn M' einer der beyden mittlern größten Coëfficienten ist (*Lehnsf.* 4. §. 9.). Folglich ist das größte Risiko in diesem Fall $= \frac{m \cdot M'}{4} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} AB$, und weil $M' = \frac{1}{2} M$. (§. 9.) auch $= \frac{m}{4} \cdot \frac{M}{2^m}$. Also ist das größte Risiko gleich bey einer geraden Zahl m , und der nächstniedern ungeraden, $m - 1$.

34.

Der mittlere grösste Coëfficient M des Binomii von der geraden Potenz m , ist bekanntlich $S^{\mu} \overline{\mu + 1}$, wenn $\mu = \frac{1}{2} m$ genommen wird. Allein wenn m eine etwas grofse Zahl ist, so wird die genaue Berechnung von M zu weitläufig, und da mufs man sich begnügen mit einem allgemeinen *nähernden Verhältnifs des grössten Coëfficienten zu der Summe aller Coëfficienten*, kann das auch, da es so nahe zutrifft, und, was es hier noch mehr brauchbar macht, immer ein wenig gröfser ist, als das wahre. Nach *Moiivre's* Angabe, (in seinen *Miscell. Analyt.* S. 128.) der sich hierbey vorzüglich bemühet

hat, ist nahe $\frac{M}{2^m} = 2,168 \dots \frac{(m-1)^{m-\frac{1}{2}}}{m^m}$, wenn m eine grofse Zahl ist, oder $= 2,168 \dots \frac{(m-1)^m}{m^m} \cdot \frac{1}{(m-1)^{\frac{1}{2}}}$.

Nun ist aber

$$\left(\frac{m-1}{m}\right)^m = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

nahe, wenn m eine grofse Zahl ist, und genau so, wenn

m *unendlich* grofs ist, das heisset, es ist $\left(\frac{m-1}{m}\right)^m$ der Zahl gleich, deren *natürlicher Logarithmus* -1 ist,

oder $= \frac{1}{2,71828}$. Folglich wird

$$\frac{M}{2^m} = \frac{2,168}{2,71828} \cdot \frac{1}{(m-1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{0,797}{(m-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nimmt man dafür $\frac{0,8}{m^{\frac{1}{2}}}$, so erhält man eine Zahl, die noch mehr sich dem wahren Verhältniß nähert, als der obige *Moiurische* Ausdruck, und doch auch das wahre Verhältniß noch immer ein wenig zu groß angiebt. Sogar wo m unter 10 ist, kann man sich ohne sonderlichen Fehler der letzten Formel bedienen.

Daraus erhält man den allgemeinen Ausdruck für das größte Risiko bey m Renten $= \frac{0,8 \cdot m}{4 \cdot m^{\frac{1}{2}}} \cdot A B$
 $= 0,2 \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot A B.$

35.

Siebenter Satz. Sind bey den einzelnen Renten der größte Gewinn $A M$, und der größte Verlust $M B$, unterschieden, so setze man ihre Differenz dividirt durch die Summe $= x$, und multiplicire $0,2 \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot A B$ mit $\sqrt{(1 - x^2)}$, so bekommt man das größte Risiko. Dieser letzte Factor ist ein Bruch, und wird leicht durch Logarithmen gefunden.

Dies folgt aus Lehnf. 5. §. 10. und aus Satz 4. in §. 23. von selbst.

Anmerkung. Wenn m eine große Zahl ist, so kann die letzte Multiplication mit $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ weggelassen, und schlechthin für das größte Risiko, $0,2 \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot A B$. (wie §. 34.) gebraucht werden. Diese letztere ist größer, allein es entstehet daraus nicht die Folge, wie oben (§. 22.)
 bey

bey den einzelnen Renten, daß nämlich das so gefundene größte Risiko $= 0,2 \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot A \cdot B$, das größte mögliche $m \cdot A \cdot M$, oder $m \cdot M \cdot B$ übertreffen werde; es müßten denn $A \cdot M$, und $M \cdot B$ gar sehr von einander verschieden seyn.

36.

Bey der Berechnung dieses Risiko der Casse kann man, wenn die Personen von verschiedenem Alter sind, wie in den gemischten Gesellschaften, das mittlere oder *Durchschnittsalter* der Interessenten zum Grunde legen. Es sey also bey einer Wittwencasse m , oder die *Zahl der Interessenten*, 576, das *Alter der Ehemänner* im Durchschnitt, 45 Jahr, der *Frauen* 35 Jahr, so wird der Werth des größten Risiko, auf die Pension 1 bey jedem Paar, so gefunden.

1) Wenn *baare Einsätze* gezahlet sind, alles nach *Süssmilchs* Tafel und nach 4 Procent berechnet.

Der baare *Einsatz* ist $= 4,4084$. Dies ist der *größte mögliche Gewinn* bey einer einzelnen Rente $A \cdot M$. (Fig. 2.).

Die *Zeitrente* auf 61 Jahr, als die Altersergänzung der Frau, ist 22,7149 und $22,7149 - 4,4084 = 18,3065$ der *größte mögliche Verlust* bey Einem Paar, $M \cdot B$. Also $A \cdot B = 22,7149$. Ferner $m^{\frac{1}{2}} = 24$.

Daraus wird $0,2 \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot A \cdot B$
 $= 0,2 \cdot 24 \cdot 22,7149 = 109,03152$.

L 4

Wenn

Wenn die Pension im Durchschnitt bey jedem Paar 100 ist, so macht dies 10903 aus. Dies ist die meisten male schon genau genug. Allein es ist doch das *größte Risiko* noch geringer.

$$\text{Weil } \frac{18,3065 - 4,4084}{22,7149} = x = 0,612$$

so wird $1 + x = 1,612$, und $1 - x = 0,387$.

und $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{0,625} = 0,79$.

Folglich das *größte Risiko*
 $= 109,0315 \cdot 0,79 = 86,135$, das ist auf 100 Rthlr.
 Pension für jedes Paar $= 8613\frac{1}{2}$ Rthlr.

2) Wenn jährliche, vor auszuzahlende Beyträge gegeben werden, so ist für die Pension 1 der erste wirklich gezahlte Beytrag $= 0,4116$, bey dem Alter des Mannes 45, und der Frau 35.

Der *größte mögliche Verlust* auf Ein Paar also,
 $22,7149 - 0,4116 = 22,3033$. Der *größte mögliche Gewinn* dagegen, wenn die Ehe noch 51 Jahr dauert, so lange als die Altersergänzung des Mannes, und dann die Frau vor dem Manne abstirbt,

$$= 0,4116 \cdot \int_{1^{51}}^1 = 0,4116 \cdot 21,61748$$

$$= 8,89775, \text{ und } 22,3033 + 8,8977 = 31,2010 = A B.$$

Folglich das *größte Risiko* $= 0,2 \cdot m^{\frac{1}{2}} A B$
 $= 0,2 \cdot 24 \cdot 31,2010 = 149,765$.

Das macht auf die Pension von 100 Rthlr. für jeden der 576 Interessenten, $14976\frac{1}{2}$ Rthlr.

Aber

Aber dieß ist nun noch (nach Satz 7. §. 35.) durch die Multiplication mit $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ zu vermindern. Es ist nämlich $x = \frac{22,3033 - 8,8977}{31,2010} = 0,43$; also $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,8151} = 0,9$. Also $0,9 \cdot 149,765 = 134,789$, das ist auf 100 Rthlr. Pension das größte Risiko 13478 $\frac{9}{10}$ Rthlr.

37.

Achter Satz. Wenn das größte Risiko unter die Interessenten vertheilet wird, so fällt auf jeden einzelnen davon

$$\frac{0,2 \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot AB (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{m} = \frac{0,2 \cdot AB (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}$$

In dem vorher berechneten Beyspiel würde solches bey den *Einsätzen* ausmachen $\frac{8613\frac{1}{2}}{570}$ Rthlr. = 15 Rthlr. nahe.

Bey jährlichen Beyträgen $\frac{13479}{576}$ Rthlr. = 23 Rthlr.

38.

Es fließen aus der vorhergehenden Untersuchung folgende für die Praxis erhebliche Resultate:

1) *Das Risiko*, was ein Entrepreneur über sich nimmt, die Summe, die er zu verlieren wagt, und deren gleiche er gewinnen kann, ist so sehr groß nicht für eine Commun, aber immer doch noch sehr *erheblich*. Man sieht

L 5

daraus,

daraus, was die zu leistende *Garantie* auf sich habe. Wer diese übernimmt, kann nach der Natur der Sache dafür nichts verlangen, so wenig als ein Spieler dafür, daß er mit einem andern sich auf ein Glücksspiel eingeläßt, wobey keiner von beyden einen Vorzug hat. Er kann so viel gewinnen als verlieren, und muß nur darauf sehen, ob er eine so große Summe aufs Spiel setzen kann?

Allein er wagt noch eins mehr, nämlich ob die Renten auch nach ihrem wahren mittlern Werth bezahlt werden. Was mehr gegeben wird, hat die *Casse* ganz voraus; was daran fehlt, ist ihr Nachtheil.

2) *Das Risiko ist bey dem Beytragsfuß etwas größer.* Das heißt aber nicht, der Nachtheil sey größer; sondern nur, es wird etwas mehr aufs Spiel gesetzt.

3) *Das Risiko der Casse ist größer, wenn die Zahl der Interessenten größer ist.* Es wächst in dem Verhältniß der Quadratwurzel der Interessentenzahl. Wie bey jedem Glücksspiel, gegen je mehrere jemand hält, desto mehr kann er gewinnen, und verlieren. Sicher ist es eine irrige Idee, die man hie und da antrifft, als wenn bey einer größern Zahl von Interessenten der Versorgungsanstalt weniger risquirt werde als bey einer kleinen, weil es alsdenn wahrscheinlicher sey, daß das Absterben mehr den angenommenen Mortalitäts-Tafeln gemäß erfolgen werde. Allerdings wird bey mehreren Personen der *mittlere Werth* unter den *wirklichen Werthen*, dem nach den Tabellen berechneten *mittlern Werth* näher

näher kommen, als bey einer kleinern Zahl; und dieß zwar nach dem obigen so, daß die Abweichung davon sich verringert in dem Verhältniß, in welchem die Quadratwurzel aus der Zahl der Personen zunimmt. Allein das ist ganz ein anders. Dieß hindert nicht, daß nicht dennoch bey mehreren Personen auch mehr verloren, wie mehr gewonnen werden könne. Das Risiko selbst steigt, das größte nämlich, in dem Verhältniß mit der Quadratwurzel aus der Zahl der Personen.

4) *Das Risiko auf jeden einzelnen Interessenten vertheilt, wird kleiner, wenn die Gesellschaft größer wird, und zwar nach demselben Verhältniß, nämlich der Quadratwurzel aus der Interessenten Anzahl.* Es wird immer größer für die ganze Gesellschaft, aber kleiner für jeden Einzelnen. Daraus denn von selbst erhellet, es sey in jedem Fall zweckmäßiger, daß die Gesellschaft selbst das Risiko übernehme, selbst sich garantire. Nur muß die Zahl der Interessenten nicht zu klein seyn. Ist sie groß, so können die Einzelnen leicht so viel ohne ihre Beschwerde wagen, als dabey zu wagen ist. Wie bey aussterbenden Gesellschaften zu verfahren sey, damit nicht das Risiko bey der kleinern, zuletzt übrig bleibenden, Zahl der Mitglieder, diese zu sehr belästige, soll anderswo gezeiget werden. Wenn aber die Gesellschaft sich selbst garantirt, so verstehet sichs, daß auch der Gewinn der ihrige sey. So bleibt auch die Gesellschaft desto mehr frey, und belästiget den Staat nicht. Nur
gegen

gegen Veruntreuung bey der Administration, und gegen Verlust der Gelder muß sie gesichert seyn. Wenn das Publicum einer Gesellschaft dieß beydes garantirt, umsonst oder gegen eine mäßige Vergeltung, so bedarf sie keines Beystandes mehr. Jedes Land und jede ansehnliche Stadt kann in sich selbst solche gesellschaftliche Verbindungen zur wechselseitigen Versorgung auf Todes- und Lebensfälle errichten, Es kommt nur darauf an, daß die Genossen außer dem, was sie für die Renten zu erlegen haben, noch so viel mehr wagen wollen, als ihr Antheil an dem Rifico der Gesellschaft austrägt. Dieß ist immer nur ein kleines Rifico in Vergleichung mit dem, was ohne dieß jeder Einzelne bey seiner eigenen Rente übernimmt. Wer das letzte wagt, kann das erste leicht mit wagen. Beydes ist nach seinem Maximum leicht zu berechnen.



Vierte Abhandlung.

Von der Zuverlässigkeit der gefundenen mittlern Grösse.

I.

Es sey die *wahre mittlere Grösse*, μ . Die aus N Bey-
spielen *gefundene*, m . Der Unterschied zwischen
den äußersten Abweichungen auf beyden Seiten des mitt-
lern Werths sey a , das ist, *die Summe der Abweichungen
auf beyden Seiten*; und unter den an sich möglichen
Werthen sey auch der $= 0$; so ist die *größte an sich
mögliche Abweichung von der wahren mittlern Grösse*, in
einem *einzelnen* Beyspiel, auf einer Seite μ , und auf der
andern $a - \mu$.

Die größte zu erwartende Abweichung des wirkli-
chen Nm von $N\mu$ ist so groß als *das größte Risiko der
Casse bey N Personen*. Das ist $= 0, 2. a. N^{\frac{1}{2}}$, wenn
die beyden äußersten Werthe als gleich weit von dem
mittlern Werth abstehend genommen werden. (§. 34.
der *Abhandl. von dem größten Risiko der Casse*.) Hier
sind a und N , was dorten $A B$ und m waren.

Sind die beyden äußersten Abweichungen von dem
mittlern Werthe von verschiedener Grösse, so ist die
größte Abweichung bey N Fällen $= 0, 2. N^{\frac{1}{2}} a(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$,

wo x die Differenz der beyden äußersten Abweichungen dividirt durch ihre Summe ist, (§. 35. am angef. O.) oder

$$x = \frac{\pm a \mp 2\mu}{a} \text{ und } 1 - x^2 = \frac{4\mu}{a} - \frac{4\mu^2}{a^2}, \text{ und}$$

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{a} \mu^{\frac{1}{2}} (a - \mu)^{\frac{1}{2}}.$$

2.

Die *größte Abweichung*, welche bey N Personen *erwartet* werden kann, vorausgesetzt nämlich, daß man keinen besondern Grund bey diesen einzelnen habe, warum sie vorzüglich mehr oder minder abweichen sollten, von dem allgemeinen Gesetz, wornach alle zusammen sich richten, geht nur so weit, daß $Nm = N\mu \pm 0,2. N^{\frac{1}{2}}. a$, seyn kann, oder überhaupt, auch für den Fall, wo μ und $a - \mu$ ungleich sind, daß

$$Nm = N\mu \pm 0,2. N^{\frac{1}{2}}. a. \frac{2}{a} \cdot \mu^{\frac{1}{2}} \cdot (a - \mu)^{\frac{1}{2}}, \text{ oder}$$

$$m - \mu = \pm \frac{0,4 \cdot \mu^{\frac{1}{2}} (a - \mu)^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}}, \text{ werde.}$$

Dies ist die Grenze, bis wie weit der Mittelwerth, den N Beyspiele geben, von dem wahren mittlern Werth μ , abweichen könne, nach der Erwartung nämlich, die Abweichung für die größte zu erwartende genommen. Es ist damit nicht gesagt, daß die Abweichung wirklich so groß sey.

Ist der wahre Mittelwerth μ noch nicht bekannt, so läßt sich solcher aus m finden, wenn man diesen für den

den am meisten abweichenden annimmt. Die Gleichung

$$m - \mu = \pm \frac{0,4 \cdot \mu^{\frac{1}{2}} (a - \mu)^{\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}} \text{ gehörig reducirt, und}$$

$$\frac{2 m N + 0,16 \cdot a}{2(N + 0,16)} = p \text{ gesetzt, giebt } q = N + 0,16$$

$$\mu = p + p \left(1 - \frac{N m^2}{p^2 q} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Der Kürze wegen kann man hier voraussetzen, daß der wahre Mittelwerth μ in der Mitte liege zwischen den beyden äussersten möglichen Werthen in den einzelnen Fällen, oder daß $\mu = a - \mu$. Ist N eine etwas grosse Zahl, so wird die so berechnete Abweichung nie die grösste an sich mögliche übertreffen. (§. 35. der Abhandl. vom Risiko). Dagegen ist man auch desto mehr sicher, daß man sie nicht zu klein genommen habe. Ist aber $\mu = a - \mu$, so ist die grösste zu erwartende Abweichung des Mittelwerths m von dem wahren, oder

$$m - \mu = \pm \frac{0,2 \cdot a}{N^{\frac{1}{2}}}.$$

3.

Ist also N eine so grosse Zahl, daß $0,2 \frac{a}{N^{\frac{1}{2}}}$ keine erhebliche Grösse mehr ist, so kann die aus N gefundene mittlere Grösse als die wahre angenommen werden.

Gleichwohl wird die äusserste zu erwartende Abweichung des Products aus N in die gefundene Mittelgrösse, in jedem Fall, $= 0,2 a \cdot N^{\frac{1}{2}}$ seyn. Die Abweichung
der

der mittlern Gröſſe ſelbſt, oder $m - \mu$ mag ſo unbeträchtlich ſeyn, als ſie will. So auch vorher bey dem Riſico, (§. 38. n. 3. *Abhandl. vom Riſico*).

4.

Hierauf beruhet eine Methode, *die mittlern Werthe der Lebensrenten aller Arten unmittelbar aus Erfahrungen zu ſuchen*, ohne daſſ man nöthig habe, vorher Mortalitätstabellen zu machen, Einzelne Verſuche ſind von dem Herrn *Oeder* ſchon bey Wittwenrenten gemacht, und die Richtigkeit der Rechnung nach der *Süßmilchſchen* Tafel für unfere Gegenden dadurch beſtätiget. Im Allgemeinen geht das an. Am leichtesten bey Leibrenten; ſchwerer iſt es ſchon bey den Wittwenrenten und noch ſchwerer bey den andern zuſammengesetztern, weil es bey dieſen ſchwer iſt, Beyſpiele genug aufzutreiben.

Es wird nämlich vorausgeſetzt, daſſ die Beyſpiele *N*, aus denen man den mittlern Werth *m* ziehet, nicht insbeſondere zu einer ſolchen Claſſe gehören, bey der eine eigene Urſache eintritt, welche die Abweichung bey ihnen größer macht. Man darf nicht lauter Kranke noch lauter gefunde Perſonen ausſuchen. Es liegt in der Rechnung die Vorausſetzung zum Grunde, daſſ bey jedem einzelnen Fall die *wirkliche Rente* mit *gleicher* Wahrscheinlichkeit die verſchiedenen Werthe haben könne, die ſie bey allen haben kann; oder hier eigentlich, daſſ

dafs dieser Werth der grösste oder der kleinste, jeder mit gleicher Wahrscheinlichkeit seyn könne, als sie es seyn kann in den andern Fällen. Daher müssen die Beyspiele aus einem gemischten Haufen genommen werden, ohne Auswahl, so wie sie im gemeinen Leben vorkommen.

5.

Und dennoch ist es besser, zuvörderst aus den Todtenlisten, die unmittelbare Beobachtungen sind, zunächst die *Sterblichkeitsordnung* zu suchen. Alsdenn hat man zugleich die Gründe, woraus alle Arten von Renten berechnet werden können. Solche Tafeln sind so zu sagen die Mittelpunkte, auf die man alle Erfahrungen zusammenbringen und von denen man auch wiederum alles verlangte herholen kann. Eben diese ihre allgemeine Brauchbarkeit macht es auch nothwendig, dafs man sie aus vielen Erfahrungen, aus mehreren Jahren, und aus mehreren Gegenden mache, das erstere auch sogar, wenn sie nur bey einer besondern Gegend gebraucht werden sollten. *Jede Zahl der Lebenden für jedes Jahr muß eine Mittelzahl seyn aus mehreren.*

6.

Wie viele Beobachtungen nun aber für jede Art von Mittelgrößen, die man suchet, erfordert werden, läßt sich aus den Grenzen abnehmen, zwischen welchen der wirkliche Werth solcher Mittelgrößen in den einzelnen Fällen liegt.

Ist von der *mittlern Lebensdauer* einer Person von einem gewissen Alter, oder von *dem mittlern Werth ihrer Leibrente* die Rede, so wird das Sterberegister eines Landes oder einer großen Stadt, worinn das Alter beym Tode angegeben ist, schon hinreichen, jene Werthe für die meisten Altersjahre zu finden. Ist zum Beyspiel eine Person 20 Jahre alt, so fällt ihre künftige Lebensdauer zwischen 0, und zwischen der Altersergänzung, das ist, wenn man 100 Jahr als das höchste Alter annimmt, zwischen 0, und 80, Um nun die mittlere Lebensdauer bis auf *ein halbes Jahr* zu finden, muß man so viele einzelne Beyspiele haben, daß 0, 2. 80, durch die Quadratwurzel der Zahl der einzelnen Fälle dividirt, kleiner als $\frac{1}{2}$ werde. Also sind in diesem Fall nur 1025 Beyspiele erforderlich, von Personen, die nach dem 20sten Jahre ihres Alters gestorben sind. Für ein gegebenes höheres Alter weniger und zwar in Verhältniß des Quadrats der Altersergänzung.

Wenn man also aus Einem Lande und nur von Einem Jahr die Zahl der Gestorbenen nach ihrem verschiedenen Alter nimmt, so ist die meisten male dieß schon genug. Nämlich um die mittlern Werthe für die Lebensdauer und die Leibrente zu finden. Es ist aber nöthig, daß die Gestorbenen nach Quinquennien verzeichnet sind. Allenfalls reicht es hin, wenn man sie nach Decennien hat. Man kann alle Todten eines Sterberegisters von Einem Jahr ansehen, als so viele, die *zugleich*
mit

mit einander geboren, und nach und nach in verschiedenen Jahren des Alters abgegangen sind. Dieß giebt einerley Verhältnisse mit dem, was wirklich geschehen ist. Sie sind sonst in verschiedenen Jahren geboren, und in einem und demselben abgestorben.

Z. B. In dem Jahr 1784 ist die Zahl der Gestorbenen in den beyden Herzogthümern *Schleswig* und *Hollstein*, nach Decennien, folgende gewesen.

Vom männlichen Geschlecht.

Vom Alter	Zahl	Vom Alter	Zahl
0 — 10	3386	60 — 70	822
10 — 20	339	70 — 80	628
20 — 30	477	80 — 90	248
30 — 40	484	90 — 100	25
40 — 50	629	und dar-	Summ. 7736
50 — 60	698	über	

Vom weiblichen Geschlecht.

Vom Alter	Zahl	Vom Alter	Zahl
0 — 10	2908	60 — 70	741
10 — 20	343	70 — 80	722
20 — 30	457	80 — 90	325
30 — 40	600	90 — 100	51
40 — 50	573	Summ. 7334	
50 — 60	614		

Wird angenommen, daß sie in jeder Classe in der Mitte des Jahrzehends, wozu sie gehören, gestorben sind, und darnach die *mittlere Lebensdauer* berechnet, so erhält man folgende Resultate.

Die mittlere Lebensdauer.

Für das männliche Geschlecht.				Nach Süßmilch im Allgemeinen.	Für das weibliche Geschlecht.	
Vom Alter	o	Jahr				
—	—	10	—	31, 25	29	— 33, 5
—	—	20	—	41, 66	42	— 42, 0
—	—	30	—	34, 75	35	— 35, 0
—	—	40	—	28, 7	28, 5	— 29, 1
—	—	50	—	22, 5	22, 5	— 23, 8
—	—	60	—	17, 0	17, 0	— 18, 6
—	—	70	—	12, 0	12, 0	— 13, 2
—	—	80	—	7, 2	8, 2	— 8, 9
—	—	90	—	6, 0	5, 5	— 6, 4
—	—		—	5, 0	3, 0	— 5, 0

Man wird nicht leicht eine grössere Uebereinstimmung verlangen, ausgenommen bey dem Alter von 90 Jahren. Und doch ist die Voraussetzung, dafs alle in der Mitte des Decennii abgegangen, schwerlich genau genug. Dieß giebt für die jüngern etwas zu viel, für die bis 60 Jahren zu wenig, und für die ältern noch mehr zu viel. Wenn man darauf Rücksicht nimmt, so ist die Uebereinstimmung mit *Süßmilch* noch grösser.

Nur dafs die Werthe bey dem *weiblichen Geschlecht* durchaus in jeder Classe grösser fallen als bey dem *männlichen*, bestätigt die mindere Sterblichkeit des erstern. Der Unterschied ist zwar nicht sehr erheblich, aber doch nicht zu vernachlässigen.

Was die Werthe der *Leibrenten* betrifft, so ist klar, da der Unterschied bey der mittlern Lebensdauer so gering ist, so werden auch die auf eine ähnliche Art
 gesuchten

gesuchten *Leibrenten* nahe zutreffen. Diese lassen sich also auch unmittelbar aus den Verzeichnissen berechnen. Aber es sind dann die gebrauchten Verzeichnisse selbst *Mortalitätstafeln*, oder vertreten hier, so weit es nöthig ist, ihre Stelle.

7.

Soll auf eine ähnliche Art der mittlere Werth einer *Wittwenrente* gesucht werden, so ist die erforderliche Zahl der Erfahrungen, von denen man annehmen kann, daß sie so gemischt sind, als sie seyn müssen, schon schwerer zusammen zu bringen. Es ist für die Wissenschaft immer besser, wie vorher schon erinnert, zuvor derst eine *Mortalitäts - Tabelle* zu suchen. Ich will mich daher nicht länger aufhalten, und nur noch etwas über die Frage hinzusetzen: *wie viele und wie vieljährige Verzeichnisse erfordert werden, um eine zuverlässige Sterblichkeits - Ordnung einzurichten?*

Vorerst ist zu bemerken, daß eine Todtenliste, die man aus einer Stadt, oder Gemeinde, oder Herrschaft von Einem Jahr erhält, hier für nichts mehr als für eine einzelne Erfahrung gelten kann. Es können auch nicht ganz kleine Gemeinen, wo überhaupt die Zahl der Todten im Jahr unter 100 ist, dahin gerechnet werden. Doch lassen sich diese mit andern kleinern zusammenziehen. Dieß sind alsdenn die Verzeichnisse, davon jedes eine einzelne Tabelle für das einzelne Jahr giebt.

*Auch ist es nothwendig, dass man die zu einer und derselben Gemeinde gehörigen Personen zusammen lasse. Man kann kein Verzeichniss gebrauchen, worinn die jünger Gestorbene aus mehreren Gemeinen, und die älter Gestorbene nur aus einigen von ihnen, oder umgekehrt, gebracht sind; die Zahl, die man nimmt, mag so groß seyn als man will. Nicht einmal solche Städte und Gemeinen, in die viele Fremde jährlich zukommen, oder aus denen Eingeborne wegziehen, geben brauchbare Verzeichnisse. Es muss wenigstens vernünftige Kritik hinzukommen, und die Verzeichnisse ändern, wie *Simpson* es mit den Londoner Registern gemacht hat. Dieß mindert doch in jedem Fall die Zuverlässigkeit.*

Nach diesen Erinnerungen können die gesammten besondern Verzeichnisse aus unsern beyden Herzogthümern von Einem Jahr hier für nicht mehr, als etwan für fünfzig Beobachtungen gelten, wenn eine Sterblichkeits-Ordnung daraus gemacht werden soll.

Man braucht solche aber bis 1600, um sicher zu seyn, dass die Zahlen, welche die Lebenden von bestimmtem Alter in der Tabelle angeben, nicht um ein halbes Jahr zu hoch oder zu niedrig stehen. Die Sache lässt sich so vorstellen. Ein gewisser Theil der Gebornen geht ab innerhalb gewisser Jahre, nach der wahren mittlern Zahl, wie z. B. $\frac{1}{4}$ tel nach *Süßmilch* im ersten Jahr, und $\frac{5}{18}$ in 18, und $\frac{7}{8}$ in 50 Jahren; wie groß

groß muß nun die Menge der Erfahrungen dieser Art seyn, um sicher folgern zu können, daß die aus ihnen gefundene mittlere Zeit des Abgangs dieser Theile nicht um ein halbes Jahr von der wahren mittlern Zahl der Jahre abweiche?

Für den Abgang von 0, 7 der Gebornen, die innerhalb 50 Jahren abgehen nach der *Süssmilchischen* Tabelle, schließet man so. Es können so viele, als dieser Theil beträgt, abgehen gleich nach der Geburt. Dieß ist das eine Aeufserste. Es können aber auch so viele übrig bleiben bis ins höchste Alter, was hier der Kürze wegen auf 100 Jahr gesetzt wird. Dieß ist das zweyte Aeufserste des an sich möglichen. In diesem Falle stehen beyde von dem wahren Mittel gleich weit entfernt. Nimmt man nun N verschiedene Fälle, in denen $\frac{7}{10}$ abgegangen sind, früher und später, so kann die zu erwartende größte Abweichung der aus diesen N Erfahrungen genommenen mittlern Zeit, von der wahren nur $\frac{0,2 \cdot 100}{N^{\frac{1}{2}}}$ seyn. Dieß soll nun weniger als $\frac{1}{2}$ ausmachen. Folglich muß N größer als 1600 seyn.

Nach *Süssmilch* sind in 18 Jahren von den Gebornen abgegangen $\frac{50}{100}$, dafür man $\frac{1}{2}$ setzen kann. Dieser Theil kann gleichfalls in dem einen äußersten Fall abgehen im Jahr 0, und in dem andern nach 100 Jahren. Also ist wiederum der Abstand oder Unterschied der beyden äußersten Fälle, das ist, $a = 100$, und N

müß 1600 seyn, wenn die größte Abweichung der in N Erfahrungen gefundenen mittlern Zeit kleiner als $\frac{1}{2}$ Jahr seyn soll. Allein hier sind die beyden Extreme ungleich von dem wahren Mittel entfernt, das eine 18, das andere 82 Jahre, und also ist $\frac{82-18}{100} = 0,64 = x$.

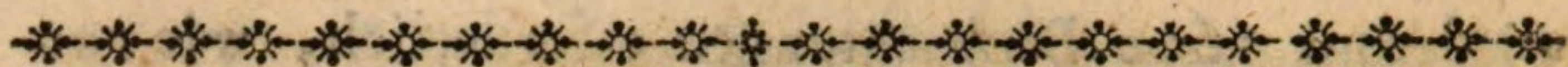
(§. 1.) Folglich $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 0,77$, und $0,77 \cdot 1600 = 1212$. So viele Beyspiele sind in diesem Fall nur erforderlich. Man braucht bey dem jüngern und ältern Alter also weniger als 1600 Fälle.

Aus den Herzogthümern Schleswig und Holstein würden also Verzeichnisse von 32 Jahren erfordert werden, um die allgemeine Mortalitätstafel für sie genau einzurichten, wenn man nur funfzig aus Einem Jahre rechnet. Aber Dännemark dazu genommen, was mit den Herzogthümern einerley Sterblichkeit hat, so kann man mit 8 bis 10 Jahren abkommen, weil dieß Reich jedes Jahr etwan 140 bis 150 brauchbare Erfahrungen liefert.

Es werden die hiesigen Verzeichnisse nur nach Decennien gemacht. Daraus kann also auf die erwähnte Art nur das Decennium des Abgangs gefunden werden. Die Einheit ist 10 Jahre, und $a = 10$. Das giebt $N = 160$. Allein dann ist $\frac{1}{2}$, als die noch übrige Abweichung des gefundenen mittlern Decennii von dem wahren, auch selbst die Hälfte eines Decennii. Um also die Abweichung innerhalb eines halben Jahrs zu beschränken, sind
wiederum

wiederum 1600 Beobachtungen erforderlich, wie vorher. Und dann hat man nur noch die Decennien.

Ist man aber hiemit zur Richtigkeit, so können die jährlichen Abgänge, in den Decennien, jeder wiederum als ein Ganzes betrachtet werden, dessen verschiedene Theile auf die einzelnen Jahre fallen. Um diese Jahre zu finden, muß man speciellere Todten-Verzeichnisse haben, in denen das Alter bis auf einzelne Jahre angegeben ist, will man anders nicht mit willkührlichen Interpolationen zufrieden seyn. Für jedes Jahrzehend gebraucht man über 16, wenn es bis auf $\frac{1}{2}$ Jahr für jeden besondern Theil getroffen seyn soll. Denn hier ist $a = 10$. So viele Fälle kann man aber aus jedem einzelnen Jahr erhalten. Es könnte also ein so genaues Verzeichniß eines einzelnen Jahres aus einem Lande hinreichen, um die Tabelle bis auf die einzelne Jahre zu bringen, wenn die Zahlen für die Decennien, vorher schon bestimmt sind.



Fünfte Abhandlung.

Ueber die Aufgabe: Wie der Ueberschuss oder der Mangel bey einer Wittwencasse den Interessenten zu berechnen sey?

I n h a l t.

Zweck der Aufgabe, und worauf es dabey ankomme. 1. 2.

Wie der Zustand der Casse zu berechnen. 3.

Wie der Ueberschuss auszumachen, der bey der Casse entbehrlich ist, ingleichen der Mangel, der nothwendig ersetzt werden muss. 4 — 16.

In welchem Verhältniss der Ueberschuss und die Defecte den Interessenten zu berechnen sind. 17 — 29.

Was, im Fall das Institut nach fehlerhaften Tabellen berechnet, zu thun sey, und wie, wenn es aufgegeben werden muss, die Interessenten auseinander zu setzen. 21 — 27.

Anmerkung über die Auseinandersetzung bey der vorigen Calenbergischen Wittwenverpflegungs-Gesellschaft. 28.

Warum insonderheit bey der veränderten Calenbergischen Gesellschaft diese Aufgabe wichtig ist. 29. 30.

Wie bey dieser letzten die Berechnung des Ueberschusses anzustellen? 31 — 37.

I.

Diese Aufgabe kommt bey der veränderten Calenbergischen Wittwenverpflegungsgesellschaft vor. Denn nach dem neuern unter dem 14ten May 1783 vorgelegten und

und nachher bestätigten Plan soll aller Ueberschufs bey der Casse den Interessenten zu gute gerechnet werden, nicht nur der, der aus den Einsätzen und Beyträgen der Genossen erwächst, sondern auch das, was von dem *landschaftlichen Zuschuss*, den man den Interessenten zu ihrer Erleichterung zugestanden hat, übrig seyn wird. Dagegen sind die auf Beyträge stehende Genossen verpflichtet, wenn die Casse zu kurz kommt, den Defect durch eine Erhöhung der Beyträge auf 5 Procent zum Theil wieder gut zu machen, auch die Wittwen müssen in diesem Fall 5 Procent, und nach dem Abgang aller Ehen 10 Procent, von ihren Pensionen sich abziehen lassen. So ist die Grenze, bis wohin die Erstattung gehen soll, festgesetzt. Geht der Verlust darüber hinaus, so übernimmt ihn die Landschaft als Garant der Casse. Die Versicherung, daß aller Ueberschufs den Interessenten zu gute kommen soll, ist hier von Wichtigkeit. Man hat sich in Rücksicht auf diese gefallen lassen, nach schweren Tabellen die Einsätze und Beyträge zu zahlen. Es beruht auch darauf der Vorzug dieser Gesellschaft vor allen ähnlichen, die wir haben. Die Interessenten bezahlen sicher nicht mehr, als wirklich der Zweck erfordern wird. Nichts für die Garantie. Was übrig ist, ist das ihrige. Kommt die Casse zu kurz, so stehen sie für nichts weiter, als bis auf die vorher erwähnte Grenze. Ohne diese Bedingung, gestehe ich, würde ich keinen Grund gefunden haben, mich auf das Institut von neuem einzu-

einzulassen, und noch weniger andere dazu aufzumuntern.

Dieselbe Frage wird künftig vielleicht bey mehreren solchen Gesellschaften vorkommen. Sollen diese häufiger errichtet, und der Nutzen in seinem ganzen Umfange erhalten werden, der aus solchen wohlthätigen Verbindungen entstehen kann, so müssen sie nie eine Art von Finanzoperationen für den Staat werden, noch auf ein Spiel eines Entrepreneurs mit einer Gesellschaft hinauslaufen. Das gemeine Wesen darf auch mit der Gewährleistung nicht beschweret werden. Die Gesellschaft leistet sich solche am besten selbst, ohne Gefahr und mit Erwartung künftiger Erleichterung, wenn nur die anfängliche Zahl der Interessenten erheblich ist, wenn Vorsichtigkeit bey der Aufnahme der Mitglieder beobachtet, alles nach guten und sichern Mortalitätstafeln berechnet, und nur Sicherheit für eine treue Administration da ist. Es ist sehr vernünftig, daß so viel gezahlet werde, als der Zweck, den man hat, erfordert. Wo sich das aber nicht so völlig genau bestimmen läßt, und auch, weil man doch immer auf widrige Zufälle voraus denken muß, ist es Klugheit, lieber etwas zu viel als zu wenig in Anschlag zu bringen. Allein warum soll ich mehr geben, als dieser Zweck nothwendig macht, und warum soll das Anfangs der größern Sicherheit wegen zu viel gegebene nicht zurück gegeben werden, wenns nicht gebraucht wird? Die Verwaltung der Casse,
die

die Rechnungsführung und die Beforgung der gesellschaftlichen Angelegenheiten erfordert allerdings noch etwas Kosten mehr, die aber nicht erheblich seyn müssen. Diese sind für sich, und können gleich anfangs festgesetzt werden, haben aber mit dem Ueberschuss oder Mangel der Casse nichts zu thun. Soll etwas für die Garantie der gesellschaftlichen Casse gegen Betrug und Verlust bezahlet werden, so ist auch diess etwas für sich, von dem übrigen abgefondert. Hier ist obrigkeitliche Autorität und Aufsicht nützlich, zuweilen gar nothwendig. Diese Nebenausgaben könnten nach Billigkeit mehr dem Theil der Gesellschaft aufgelegt werden, der wirklich bey dem Erfolge gewinnt, nämlich den Pensionisten. Aber wenn man sie auch durch alle gleich vertheilen will, so gehören sie nicht zu denen, wovon hier die Rede ist.

2.

Die Aufgabe ist ganz allgemein. Ich will sie hier aber auf *Wittwencassen* einschränken. Sie kann auf dieselbe Art bey jeder Versorgungsanstalt beantwortet werden. Es wird allemal auf folgende Punkte ankommen.

1) In jedem Termin ist der Zustand der Casse, was sie baar hat, was sie zu erwarten, und was sie dagegen auszugeben hat, auszumachen. Daraus ergiebt sich der Ueberschuss oder der Mangel.

2) Es

2) Es ist auszumachen, *was von dem Ueberschuss als entbehrlich* bey der Casse angesehen werden kann, ohne dafs auf den etwanigen künftigen Verlust Rücksicht zu nehmen sey? Eben so in Rücksicht des entstandenen Defects, *wie viel so gleich davon als unentbehrlich zu ersetzen sey?*

3) Dann ist zu bestimmen, in welchem *Verhältnisse beydes unter die Interessenten der Gesellschaft zu vertheilen sey?*

3.

Bey dem ersten Punct ist keine Schwierigkeit. Auch ist die Rechnung nicht einmal mühsam, wenn sie nur gleich vom Anfang darnach eingerichtet wird. Ich will hier nur ganz kurz angeben, worauf es ankomme. Hr. Hofrath *Karsten* hat in seiner *Theorie von Wittwen-cassen*, in dem VIIten Abschnitt, dieß ausführlicher und deutlicher auseinander gesetzt.

Die *Activa der Casse* sind nämlich: 1) *die baaren Einnahmen*, an Einsatzgeldern, oder an Beyträgen, und was daraus an Zinsen und Zinsen von Zinsen, nach dem angenommenen Zinsfuß erwachsen ist.

Die Abrechnung wird jedesmal entweder am Schluß des vorhergehenden Termins oder nach dem Anfang des folgenden gemacht. Das ist entweder vor dem Empfang der neuen Beyträge und vor der Auszahlung der in dem Termin dormalen fälligen Wittwenpensionen, nachdem
 schon

schon die Nachrichten von den neuentstandenen und abgegangenen Wittwen, und von den durch den Tod ihrer Frauen abgetretenen Ehemännern eingegangen sind; oder sie wird gemacht, wenn Einnahme und Auszahlung schon geschehen sind. Am natürlichsten ist das erste, jedoch kann auch das letzte anderer Ursachen wegen bequemer seyn.

Wenn die auf Beytragsfuß eingetretene Mitglieder eine gewisse Summe als Hypothek zur Casse bringen, die aber nach der Trennung der Ehe zurück gegeben wird, und davon die Zinsen jedesmal als ein Theil der Beyträge angesehen werden, eine Einrichtung, die aus mehreren Gründen zu empfehlen ist, so gehören diese Gelder nicht zu dem Bestand der Casse, sondern sind bloß ein Depositum, oder eigentlich eine nothwendige Anleihe, die der Casse bis zur Trennung der Ehe zu machen ist, und die zugleich zur Hypothek dient.

2) *Die baaren Werthe der Eherenten von den noch bestehenden Ehen*, nach der Gröfse der Beyträge. Ihre Werthe ändern sich, so wie die Ehepaare älter werden. Sie können sehr leicht nach den angenommenen Tabellen berechnet werden.

Von denen, die auf einmal Einsätze erlegt haben, empfängt die Casse nichts mehr. Aber die auf Beyträge stehen, zahlen das ihrige durch diese Eherenten, die so groß sind, als die Beyträge, zu welchen sie Anfangs
angefezet

angesetzt sind. Diese Eherenten machen die künftige Einnahme der Casse von diesen Mitgliedern aus.

1) *Die Passiva der Casse bestehen aus den baaren Werthen der fälligen Leibrenten der vorhandenen Wittwen*, welche sich ebenfalls von Termin zu Termin ändern. Jedoch ist dabey zu merken, daß wenn die Rechnung am Schluß des vorhergehenden Termins gemacht wird, so ist die nächste Hebung der Wittwenpensionen eine *baar* und *gewiss* auszahlende *Schuld*. Diese ist also auch besonders zu rechnen, und dann dazu der Werth der Leibrente für die Wittwen, nach jeder ihrem dermaligen Alter, als künftige Ausgabe anzusehen. Hiebey kommt auch das *Wiederverheyrathen* in Betracht, so ferne gleich Anfangs bey Berechnung der Wittwenpensionen darauf gerechnet ist. In demselben Verhältniß, wie es da gerechnet ist, muß es auch in der Folge gerechnet, und also von den Leibrentenwerthen dafür etwas abgezogen werden.

2) *Der Werth der eventuellen Wittwenpensionen der Ehefrauen, deren Männer noch leben*. Diese Werthe ändern sich gleichfalls mit dem Alter der Paare.

Wenn man vom Anfang an bey der Rechnungsführung für jedes Paar außer den Columnen des *Alters*, noch eine für den *Werth der künftigen Eherenten*, und eine für den *Werth der künftigen eventuellen Wittwenpensionen*, und bey jeder vorhandenen Wittwe den Werth
der

der künftigen Leibrente zur Seite setzet, so läffet sich bey jedem neuen Termin, was in diesen Werthen zu ändern ist, aus den Tabellen ohne viele Mühe finden: Was dabey etwan noch mehr zu erinnern ist, sieht ein in solchen Sachen ein wenig geübter Rechnungsführer von selbst. Wenn dergleichen vollständige Aufrechnung alle halbe Jahre zu machen wäre, was gar nicht nöthig ist, so könnte noch die Frage entstehen, wie die *halbjährlichen Zinsen* der vorrätthigen Gelder in Anschlag zu bringen sind? Es kommt auf den zum Grunde gelegten Zinsfuß an, wo bey grossen Summen es freylich nicht einerley ist, ob 2 Procent halbjährlich, oder 4 Procent jährlich zu rechnen sind.

4.

Mehr Schwierigkeiten finden sich bey dem zweyten Punct. (§. 2.). Bey der Frage nämlich: ob der *Ueberschuss oder Mangel*, der sich beym Abschluß der Rechnung in einem gewissen Termin findet, von dem künftigen Erfolg sich trennen lasse, und jener als entbehrlich zurückgegeben, dieser als etwas nie entbehrliches von den Interessenten ersetzt werden müsse? Ist es nämlich erlaubt, eine solche Abweichung bloß für eine Folge der Tabellen anzunehmen, die entweder zu viel oder zu wenig von den Interessenten gefordert haben? Oder ist es bloß günstiger oder ungünstiger Zufall in dem besondern Termin, und wie weit darf oder muß erwartet

werden, daß in den folgenden Terminen eine Abweichung von gleicher GröÙe auf die entgegengesetzte Art sich finden werde?

5.

Man setze Anfangs die *Garantie* der Casse bey Seite, oder nehme an, die Gesellschaft habe sich selbst garantirt, das ist, die Interessenten haben es übernommen, außer ihren tabellarischen Leistungen so viel nachzuschießen, als die Casse zu kurz kommen mögte.

Ferner sey Anfangs die Aufgabe auf eine Gesellschaft eingeschränkt, die aus *gleichen Paaren* besteht, die alle auf einerley Fuß, und zwar auf *Capitalfuß* eingetreten sind. Sie läßt sich nachher leicht auf andre erweitern.

6.

Ueberhaupt ist es für sich klar, wenn immerfort dieselbige Zahl der Interessenten in der Gesellschaft bleiben könnten, die von Anfang an zusammen gekommen sind, bis ganz zu Ende aus, bis nämlich der ganze Zweck erfüllet ist, da denn statt der abgehenden *Ehemänner*, ihre *Wittwen* als *Interessenten* eintreten, so könnte in jedem Termin der gefundene Ueberschuß oder Mangel vertheilet werden, sie mögten entstanden seyn, aus welcher Ursache man will. Nur müßte die Casse Sicherheit von jedem in Händen haben, daß die etwan nöthigen Nachschüsse geleistet werden. Dann würde es auch einerley seyn,

seyn, ob man terminlich, oder am Ende erst die Abrechnung machte. Doch weil am Ende keiner der Interessenten den Vorthail selbst genießen könnte, so würde die terminliche Vertheilung zu rathen seyn, wenn sich der Mühe verlohnte; wenn das nicht ist, so kann der Ueberschuß wie der Mangel den Erben überlassen werden.

Das ist nun freylich nicht so. Es gehen immer Interessenten ab, wenn gleich die Wittwen auch zu ihnen gerechnet werden. Allein so viel folgt unmittelbar aus dem angenommenen Fall, daß es in dem wirklichen Fall *bloss auf die Abrechnung mit den abgehenden Interessenten ankomme*. Ob nämlich diejenigen, welche noch bey der Gesellschaft bleiben, die andern, welche austreten, an dem Ueberschuß zur Zeit des Austritts Antheil nehmen lassen, und im Fall des Defects auch Erstattung desselben von ihnen fodern können, oder nicht?

Wenn der Mann stirbt, und die Frau als *Wittwe* am Leben bleibt, so kann diese noch als *mitgarantirendes Mitglied* angesehen werden. Es kann aber auch anders verabredet seyn. Das erste ist das natürlichste, so will ichs hier auch annehmen. Alsdenn wird sich die Zahl der garantirenden Interessenten nach der Zahl der noch lebenden *Frauen* richten, sie mögen als *Ehefrauen* leben, oder als *Wittwen*. Ob sie im Wiederverheythungs-Fall austreten sollen, kommt auch auf eine

besondere Bestimmung an, die hier gleichfalls bey Seite gesetzt wird. Demnach ist *die Zahl der garantirenden Interessenten so groß als die Zahl der Frauen, die von den anfänglich eingetretenen Ehen noch am Leben sind.* Es gehören nämlich dahin, die Ehemänner, deren Frauen noch am Leben sind, und die vorhandenen Wittwen.

7.

Um nun aber zu festen Grundsätzen zu kommen, wornach sich beurtheilen läßt, wie fern ein Ueberschuss, der sich nach einiger Zeit bey der Casse zeigt, entbehrlich sey, oder nicht? Ingleichen bey einem sich eräugenden Mangel, wie ferne solcher nothwendig zu ersetzen sey oder nicht? muß folgendes erwogen werden.

Es kann eine Abweichung des wirklichen Erfolgs von den Tabellen daher entstehen, weil die Tabellen unrichtig sind. Diese kann *die Abweichung der Tabellen* heißen. Sie entsteht, wenn die *wahre mittlere Grösse* in den Tabellen nicht getroffen ist, wenn die tabellari-schen Werthe der Leibrenten und Verbindungsrenten nicht die wahren mittlern Werthe sind, oder hier bey den Wittwencassen, wenn die *Einsätze* oder *Beyträge* zu hoch, oder zu niedrig gerechnet sind. Dahin gehört bey Würfelspielen ein Fall, wie folgender. Wenn jemand, der für jedes Auge, das er mit einem gewöhnlichen sechsseitigen Würfel wirft, von dem Entrepreneur Einen Thaler empfangen will, seinen Wurf mit 3 bezah-

bezahlet hat. In diesem Fall giebt er zu wenig. Er kann 1, 2, 3, 4, 5, 6 werfen, und jeder dieser Würfe ist gleich wahrscheinlich. Der eigentliche Werth seines Wurfs ist $3\frac{1}{2}$. Ein Entrepreneur verlieret bey den Würfeln, auch in dem Fall, wenn bey einer Menge derselben jedes Auge gleich oft fällt, wie es nach der vorausgesetzten Wahrscheinlichkeit fallen soll.

Wenn die Tabellen nicht abweichen, so ist weder Ueberschuss noch Mangel zu erwarten, das ist, es hat weder jenes noch dieses einen Werth nach der Natur der Sache. Berechnet man alle Werthe der möglichen Gewinne, die nämlich am Ende übrig bleiben, das ist, die *reinen Gewinne*, oder wird jeder solcher möglichen Gewinne in seine Wahrscheinlichkeit multiplicirt, und eben so die *Werthe des möglichen Verlustes*, oder der negativen Gewinne, so hebt sich beydes zusammen genommen gegen einander auf.

Dagegen wenn die wahre mittlere Gröſse nicht angenommen ist, so ist der Werth des möglichen reinen Gewinns dem Werth des reinen Verlustes nicht gleich. Und also je nachdem jener oder dieser gröſser ist, hat entweder die Erwartung, daß mehr gewonnen als verloren werde, oder umgekehrt, einen bestimmten Werth, der nicht Null ist.

Dies ist eine Folge von demjenigen, was in der Abhandlung über das *Risico der Casse* gesagt ist. Es

erhellet aber auch unmittelbar aus der Natur der Sache. Es ist eine Wahrscheinlichkeit da, am Ende gewonnen zu haben, und diese hat einige Grösse; und zwar *am Ende* gewonnen zu haben, die einzelnen Fälle, worinn gewonnen und verloren ist, gegen einander aufgerechnet. Eben so verhält es sich mit der Wahrscheinlichkeit, am Ende verloren zu haben. Allein die Erwartung des Gewinns ist der des Verlustes gleich.

Wenn das nicht ist, und sich das ausmachen läßt, so ist es ein sicheres Zeichen, daß in den Tabellen eine Abweichung liege. Der Unterschied zwischen den beyden Erwartungen ist jedesmal so groß, als das Product aus dem Unterschiede zwischen der wahren mittleren Grösse, welche die Casse hätte haben sollen, und der, welcher sie eigentlich empfangen hat, in die Zahl der Interessenten multiplicirt.

8.

Eben so gewiß ist aber auch dies. *Wenn die Tabellen so richtig sind, als sie ihrer Natur nach seyn können, so bleibt ein gewisses Risiko übrig für die Casse.* Das ist: Es giebt eine *Erwartung zu gewinnen* von einer gewissen Grösse, und eine *Erwartung zu verlieren*, die hier jener gleich ist. Mit andern Worten. So richtig die Tabellen auch sind, so bleibt etwas dem Zufall unterworfen, der mit gleicher Wahrscheinlichkeit günstig oder ungünstig ausfallen kann. Er falle, wie er wolle, so

so folget daraus nicht, daß in den Tabellen die wahre Mittelgröſſe verfehlet ſey.

Die *Erwartung des Gewinns* hat die Gröſſe, daß wenn jemand mit der Caſſe den Contract macht, allen reinen Ueberschuß zu empfangen, der am Ende da iſt, ohne jedoch ihr dagegen etwas zu erſetzen, im Fall ſie zu kurz kommt, ſo muß er für ſeine Erwartung ſo viel ihr baar auszahlen.

Die *Erwartung des Verlustes* iſt ſo groß als die Summe, welche die Caſſe an einen Entrepreneur zahlen müßte, der ihr vor allem Mangel einſtehen, dagegen nichts von ihrem Ueberschuß haben wollte. Wer aber beydes Ueberschuß und Mangel für ſich haben will, hat nichts zu zahlen, noch zu empfangen. Alles nämlich unter der Vorausſetzung, daß in den Tabellen ſelbſt keine Abweichung ſtatt findet.

9.

Daraus flieſſen dieſe zwey Grundſätze.

1) *Iſt in einem der folgenden Termine, nach dem Anfang der Geſellſchaft, ein Ueberschuß in Caſſe, (nach den Tabellen die Rechnung gemacht) welcher größer iſt, als das Riſico der Caſſe, ſo iſt der Unterſchied zwiſchen jenem und dieſem, ſicher entbehrlich.*

Denn iſt der Ueberschuß größer als das Riſico, ſo nehme man den Theil davon ab, der ſo groß iſt, als

das letztere. Für diesen Theil kann die Casse aufs künftige für allen Verlust gesichert werden, und hat noch die Erwartung, künftig zu gewinnen. Was übrig ist, ist also ganz entbehrlich.

Wer dies leugnet, muß die Tabellen für die Zukunft als unrichtig ansehen. Denn sind die Tabellen für die Zukunft richtig, so ist die *Erwartung des künftigen Verlustes* für sich allein nicht größer, als das erwähnte *Risico*, für dessen Zahlung die Garantie erkaufet werden kann. Es ist nicht die Frage, ob jemand sich mit einem solchen Handel abgeben werde; genug das ist der wahre Werth der Natur der Sache nach. Ist aber die Casse gegen allen künftigen Verlust gesichert, so bedarf sie nichts mehr.

IO.

Wenn der Ueberschuß größer ist, als das *Risico* für die Zukunft, so kann doch daraus noch nicht geschlossen werden, *dass die Tabellen fehlerhaft sind, wofern nicht der Ueberschuß mehr beträgt als das Risico der Casse in diesem Termin, und das Risico im Anfang der Gesellschaft zusammengekommen.* Denn es ist dieser Ueberschuß noch kein *reiner Ueberschuß*, sondern nur ein *partieller* aus einem Theil der Fälle entstanden. Es kann künftig noch so viel wieder verloren werden, als das *Risico* groß ist von dem Termin der Abrechnung an bis Ende aus, das ist, bis alle gegenwärtige Interessenten abgegangen sind;

sind; und dieß der Richtigkeit der Tabellen ohnerachtet. Geschieht nun aber solches, so geht so viel wiederum von dem Ueberschuß ab, und was denn übrig bleibt, ist ein *reiner endlicher Gewinn*, der noch nicht größer ist, als die Erwartung zu gewinnen im Anfang war, und der mit der Richtigkeit der Tabellen bestehen kann.

Wenn aber von dem Ueberschuß in der Casse der Theil abgehen kann, der zur Sicherung für Verlust auf künftige hinreicht, und denn noch mehr übrig bleibt, als im Anfang die Erwartung des endlichen reinen Gewinns war, so ist die Tabelle so, daß sie schon einen Gewinn für einen Theil aller Fälle gegeben hat, der größer ist, als der zu erwarten war aus allen zusammen. Sie ist also in so weit abweichend befunden worden. Man kann sie zwar abweichend und für die gegenwärtige Gesellschaft fehlerhaft nennen, so bald sie nicht ganz genau zutrifft. Aber so ein Zutreffen, zumal für einzelne Termine ist gar nicht zu erwarten, ist vielmehr erstaunlich unwahrscheinlich.

Wenn der Erfolg so weit zusammentrifft mit der Tabelle, daß der reine Gewinn oder Verlust am Ende nicht größer ist, als jeder für sich von Anfang an erwartet werden konnte, so kann man die Tabelle als mit dem Erfolg übereinstimmend ansehen: Allein wenn der Erfolg weiter von ihr abgeht, so kann man sie als abweichend oder fehlerhaft annehmen.

II.

Ferner. So lange der Ueberschuss nicht grösser ist, als das Risiko für die Zukunft, so lange kann solcher nicht für sicher entbehrlich angesehen werden. Denn die Tabellen sind zwar auch für die Zukunft richtig. Es liesse sich noch nichts befürchten, wenn man allen Ueberfluss der Casse weggäbe. Die Erwartung des Gewinns ist noch für die Folge so gross als die Erwartung des Verlustes. Der Unterschied, dass im Anfang die Sterblichkeit in der ausgesuchten Gesellschaft noch mehr geringer gewesen ist, in Vergleich mit der gemeinen Sterblichkeit nach den Tabellen, als sie es ist in einem der folgenden Termine, kann freylich befürchten lassen, dass künftig der Ueberschuss nicht so gross seyn werde. Allein diese Verschiedenheit kommt hier nicht in Betracht, und würde ohnedies noch kein Grund seyn, künftig Defecte zu befürchten. Es ist klar, dass doch nicht der ganze Ueberschuss sicher als entbehrlich angenommen werden könne. Die Tabellen für die Zukunft sind sicher, das heisst weiter nichts, als dies: man wird mit ihnen ausreichen, nur muss man dabey erwarten, dass doch so viel als das Risiko beträgt, so gut verloren als gewonnen werden könne. Die Casse bekommt durch den schon gewonnenen Ueberschuss mehr Sicherheit gegen Verlust, als sie Anfangs hatte, und also ist ihr Risiko zu verlieren, geringer als es von Anfang war. Allein sie ist noch nicht ganz sicher, so lange der Ueberschuss noch kleiner ist als dies Risiko für die Zukunft.

I2.

2) Der zweyte Grundsatz ist dieser: *Ist der gefundene Defect noch nicht so gross als das Risiko der Casse, so ist es noch nicht nothwendig, ihn zu ersetzen. Allein sobald es über dies letztere hinausgeht, muss so viel als jener grösser ist, nothwendig ersetzt werden.*

Die Gründe sind die nämlichen, wie vorher. So lange der Defect unter dem Risiko ist, kann in Zukunft so viel wieder gewonnen werden. Geht jener weiter, so ist das übrige Verlust, dessen Ersatz nicht zu *erwarten* ist, nach den Tabellen.

Dass die Tabellen bey einem solchen Erfolg schon als *abweichend* anzusehen sind, lässt sich noch darum nicht behaupten. Dies lässt sich dann erst sagen, wenn *ausser dem Risiko für das künftige noch ein Defect übrig bleibt, der das anfängliche Risiko übertrifft.* Wie oben im 10ten §.

I3.

Um also für jeden Termin, in welchem die Rechnung gemacht ist, den *entbehrlichen Ueberschuss*, oder den *zu ersetzenden Defect* zu finden, ist nichts nöthig, als *das derzeitige Risiko der Casse zu berechnen.* Dafür kann man das *grösste* nehmen, muss es auch die meisten male wohl, wegen der Schwierigkeit und Weitläufigkeit, die mit der genauen Berechnung desselben verbunden ist.

Die

Die Zahl der Interessenten in dem bestimmten Termin, das ist hier, die *Zahl der stehenden Ehen und der Wittwen zusammen* sey N , und a die *Summe des an sich möglichen grössten Gewinns und Verlustes, bey einem einzelnen Interessenten*. Ist dieser wegen der Verschiedenheit des Alters der Interessenten nicht bey allen derselbe, so nehme man die mittlere Grösse aus allen. Dann ist das grösste Risiko der Casse leicht zu berechnen. Es ist o, 2. a. $N^{\frac{1}{2}}$. (§. 34. der *Abhandl. vom Risiko der Casse*). Und wo der grösste *Verlust* merklich von dem grössten *Gewinn* verschieden ist, $=$ o, 2. a. $N^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, wenn die Differenz des *an sich möglichen grössten Gewinns* und *Verlustes* bey einer einzelnen Rente durch a dividirt $= x$ gesetzt wird. (§. 35. *angeführt. Abhandl.*)

Wenn die Gesellschaft *ausstirbt*, so wird das Risiko kleiner in jedem Termin, weil so wohl die Zahl N , als der Werth von a abnimmt. Werden *neue Mitglieder* aufgenommen, so versteht sich, das man diejenigen, welche in dem Rechnungstermin hinzu gekommen sind, noch nicht mitrechnen müsse. Auch dieß braucht nicht erinnert zu werden, das hier die Gleichheit der versicherten Pensionen bey den Interessenten vorausgesetzt wird. Wenn das nicht ist, so wird jeder einzelne gerechnet nach der Grösse der Pension. Ist diese doppelt so groß bey einem als bey einem andern, so ist jenes so viel als zwey Interessenten, wenn die Pension der letztern zur Einheit angenommen wird.

Das

Das größte Risiko auf die einzelnen Interessenten vertheilet, giebt für jeden $\frac{0, 2. a}{N^{\frac{1}{2}}}$, die Correction bey Seite gesetzt, die aus der Differenz des größten möglichen Gewinns und Verlustes bey der einzelnen Rente erwächst, und die der größern Sicherheit wegen lieber ganz weggelassen wird, wo vom Ueberschuss die Rede ist. Kommt ein Defect vor, so ist mehr dahin zu sehen, daß das Risiko nicht zu hoch gerechnet werde. Das auf jedes einzelne Mitglied fallende Risiko mag bey der aussterbenden Gesellschaft größer werden, wenn die Interessentenzahl abnimmt; allein das gesammte Risiko der Casse wird immer kleiner.

I4.

Die Gesellschaft mag aussterben, oder jedesmal wieder ergänzt werden, so wird sie auf diese Art immer so gehalten, daß sie weder unnöthigen Ueberfluß hat, den die Interessenten ja lieber selbst in Händen haben, noch auch zu schwach wird ihren Verpflichtungen nachzukommen. Diefs ist klar, wenn sie fortgesetzt und gleichförmig ergänzt wird, und endlich zum Beharungsstande kommt. So lange noch die Zahl der Interessenten sich vergrößert, wird zwar in einem Fall der nicht entbehrliche Ueberschuss, der zurückbleiben muß, und in dem andern Fall der Defect, der nicht ersetzt werden darf, größer, allein dann wird auch das, was
auf

auf die Einzelnen davon fällt, kleiner, und also unbedeutender.

Stirbt die Gesellschaft aus, so wird das Risiko für die Einzelnen etwas grösser, wenn die Zahl der Personen abnimmt. Bleibt zuletzt nur Eine Person noch am Leben, so ist im Fall des Ueberschusses, ausser ihrer Leibrente nach den Tabellen, noch mehr in der Casse vorhanden. Es ist alsdenn a oder die Summe des an sich möglichen grössten Verlustes und Gewinnes, so viel als die Zeitrente auf die Altersergänzung $= \int \frac{1}{r^a}$, wenn eine Wittwe übrig, und a ihre Altersergänzung ist. (§. 26. vom Risiko). Das grösste Risiko also, was ausser der Leibrente für sie da ist, wird seyn $0, 2. \int \frac{1}{r^a}$. Dieß ist der Gewinn dieser längstlebenden Person für die letzte Zeit, der ihr allein zukommt, sie mag vorher am Gewinn Antheil genommen, oder auch Schaden gelitten haben. Es ist aber auch etwas nicht sehr beträchtliches.

Wenn auch im entgegengesetzten Fall so viel weniger vorhanden ist, so ist das ebenfalls kein erheblicher Verlust; und wenn die längstlebende Wittwe vorher schon gewonnen hat, so kann sie ihn desto füglicher tragen. Dieß ist eine Folge von dem unvermeidlichen Hazard, der bey einer solchen Casse übrig bleibt. Es ist aber auch leicht, Einrichtungen zu treffen, wodurch man diesen Unbequemlichkeiten bey der letzt übrigbleibenden zuvorkommt.

15.

So lange als die Tabellen nicht abweichend befunden werden, in dem Sinn, wie es oben in §. 10. und §. 12. bestimmt ist, hat es also damit nichts auf sich. Allein wenn dieß letztere sich zeigt, so kann, zumahl wenn sie unzureichend sind, für die letzt lebende Person der Nachtheil zu wichtig werden. *Es ist nöthig, daß für diesen Fall der Abweichung etwas zum voraus in dem Grundplan der Gesellschaft festgesetzt werde.* Man kann in den ersten Zeiten die Abrechnungstermine etwas kürzer setzen, und alle Jahre oder alle halbe Jahre die Bilanz ziehen, um zu sehen, wie beträchtlich die Abweichung des Erfolgs seyn werde. Findet man sie unwichtig in Verhältniß mit dem Risiko, wie es seyn wird, wenn nach zutreffenden Mortalitätstabellen gerechnet ist, so braucht man so oft nicht nachzurechnen.

Gesetzt aber, es sey ein Ueberschuss oder ein Defect da von einer solchen Gröſse, daß nach §. 10. die Tabellen für abweichend erklärt werden müssen, so ist entweder eine Veränderung für die Zukunft mit ihnen zu machen, und dann auch die Aufrechnung auf die Zukunft nach den veränderten Tabellen anzustellen, oder man muß bey dem Grundsatze bleiben, die Tabellen sollen wie sie sind, durchgesetzt werden. Wird das letztere beliebt, so versteht es sich auch, daß die Längstlebende ihr Schicksal nehmen muß, wie es fällt. Im
Fall

Fall des Defects ist für sie bloß die Leibrente da, weniger dem Rifico, und jene kann selbst schon zu geringe seyn. Aber es ist dem anfänglich eingegangenen Contract gemäß. Beliebet man dagegen eine Abänderung der Tabellen, so gehts bey den folgenden Untersuchungen der Casse nach den neuen Tabellen, wie vorher nach den alten.

16.

Die Tabellen sind nämlich *abweichend*, oder was hier gleichviel ist, fehlerhaft, wenn der Ueberschuß oder Defect, den man in einem Abrechnungstermin findet, so groß ist, daß nach Abzug des Rifico für die Zukunft, noch mehr übrig bleibt, als das Rifico im Anfang der Gesellschaft war. (§. 10. 12.) Sind nun aber *vorher schon solche Abrechnungen gemacht*, und ein entbehrlicher Ueberschuß aus der Casse weggenommen und vertheilet, oder sind Defecte, die nach dem obigen zu ersetzen waren, wirklich ersetzt, *so müssen diese vorher vertheilten Ueberschüsse oder ersetzten Defecte, hiebey mit in Anschlag gebracht werden.* Ist abwechselnd das eine und das andere geschehen, so wird dieß zusammen genommen. Man kann die Abrechnungstermine kürzer oder länger machen, und in jedem die Casse wirklich in den Zustand bringen, den sie haben muß. Das entbehrliche kann genommen, und das unentbehrliche, was fehlet, zugeschoffen werden. Allein wenn die Frage ist, sind

sind nach dem bisherigen Erfolg die Tabellen als abweichend anzusehen, so muß mans so nehmen, als wenn in diesem Termin noch alles vorher vertheilte in der Casse vorhanden sey, und als wenn noch kein Defect vorher ersetzt worden, mit einem Wort, als wenn nun zum erstenmal abgerechnet würde. Dieß versteht sich leicht von selbst, aber in einer Materie, die noch nicht durchgedacht ist, wird manche Erinnerung nöthig, über das was sich von selbst verstehet, oder was doch der gemeine Menscheninn einem jeden beym Geschäfte selbst eingeben kann.

17.

Nun noch die dritte grose Frage bey der Aufgabe: *wie der Ueberschuss oder der Defect unter den Interessenten zu vertheilen sey?* Sie beantwortet sich beynahe von selbst.

1) *Es nimmt niemand an dem gewonnenen Ueberschuss oder an dem entstandenen Defect Theil, als die in der Zeit, da jene entstanden, Interessenten gewesen sind.* Dahin gehören ausser den Frauen, deren Ehemänner noch leben, oder welches gleich viel ist, ausser den Ehemännern, deren Frauen noch leben, die vorhandenen Wittwen der schon verstorbenen Ehemänner, wenn nicht anders diese letztern durch eine besondere Bedingung ausgeschlossen sind. Eigentlich ist es die *Frau*, welche interessirt ist, obgleich der Mann für sie bezahlt hat, oder

für sie fortwährend beyträgt. Sie ist es Anfangs als eine *eventuelle Pensionistin*, nachher, als eine *wirkliche*. Sie hat im ersten Fall alles geleistet, was sie nach dem Contract zu leisten hatte, und es kann gar nicht in Betracht kommen, wie lange oder kurz sie das eine oder das andere gewesen sey? Ist zu viel gegeben, so bekömmt sie das zurück, und ist zu wenig gegeben, so zahlt sie es nach, oder es wird ihr von ihrer Foderung abgezogen. Der Werth, den sie für ihre eventuelle und nun wirklich fällige Rente bezahlt hat, ist das Capital, was die Wittwe in der Casse stehen hat. Was die Casse gewinnt oder verliert, wird also auch auf ihr Geld pro rata gewonnen. So ist es auch im Fall des Verlustes. Es mögen wenige oder gar keine Beyträge für sie bezahlt seyn, nach den Tabellen. Gleichviel. Wozu sie sich anheischig machte, hatte der Zeit eben den Werth, als der baare Einsatz auf einmal gehabt haben würde.

18.

2) *Diejenigen von den Interessenten, die abgegangen sind, haben weder an dem Vortheil noch an dem Nachtheil der Casse, der nach ihrem Abgang erwachsen ist, Theil nehmen können.* Sie haben die Zufälle zu tragen sich verpflichtet, so lange sie Mitglieder sind. Aber es ist wider die Natur solcher Einrichtungen, vorauszusetzen, daß sie noch in Hinsicht dessen, was nachher sich zuträgt, etwas sollten nachzuzahlen, oder davon zu erwarten

erwarten haben. Die Summe, die jemand im Anfang als Einsatz oder Beytrag erlegt hat, fällt der ganzen Gesellschaft anheim, welche übrig bleibt, auch wenn jener sogleich durch den Tod der Frauen von der Gesellschaft abtritt.

19.

3) Was das *Verhältniß* betrifft, *wornach* der Gewinn oder Verlust unter die einzelnen Genossen der Gesellschaft zu vertheilen sey, so ist dieß offenbar aus den *Einsätzen* zu bestimmen. Es sind nicht die *Pensionen*, das ist die jährlichen Hebungen der Renten, worauf gewonnen oder verloren wird. Es sind ihre baaren Werthe, oder die baaren Einsätze. Die letztern sind nur dann in demselben Verhältnisse mit den Pensionen, wenn das Alter der Eheleute bey allen Paaren einerley ist. Das war ein anders oben in dem 14ten §., als von dem größten Risiko der Casse die Rede war. Dieß Risiko hängt ab von der GröÙe der jährlichen Hebung, wenn vorher der möglich größte Verlust auf eine einzelne Person nach einem mittlern Durchschnitt genommen ist. Dagegen hier, wo von dem Ueberschuss oder dem Defect die Rede ist, zeigt selbst die Art, wie solche aus den Activis und Passivis gefunden werden, daß in jedem Fall auf *die baaren Werthe der Renten*, oder auf die *Einsätze* gesehen werde. Auf die GröÙe der jährlichen Hebungen nur dann, wenn sonst das übrige gleich ist. Was aber

die *Beyträge* betrifft, so ist ihr Werth jedesmal auf den Werth eines baaren Einsatzes zurück zu bringen.

Es ist zugleich klar, daß auch die *Wittwen* als Interessenten betrachtet, nicht anders als nach dem Verhältniß der anfänglichen baaren Werthe der Wittwenpensionen, oder des baaren Einsatzes, bey der Vertheilung anzusetzen sind. Die Wittwen *als Empfänger* betrachtet, haben mit der Abweichung der Casse nichts zu thun. Denn ist diese wieder rectificirt, so kann jede völlig empfangen, was sie haben soll. Aber an der Rectification selbst nehmen sie Antheil, es sey denn, wie oben schon erinnert, daß ausdrücklich in Hinsicht ihrer ein anderes festgesetzt sey.

20.

Aus dem zweyten Grundsatz in §. 18. folget von selbst, daß *nur denen von den Interessenten das berechnete zu gut komme, oder zur Last falle, die der Zeit bey der Gesellschaft gewesen sind, als der Gewinn oder Verlust entstanden ist.* Darnach hat man also den abgegangenen sowohl als den neu hinzugetretenen, wenn die Gesellschaft fortgesetzt wird, das ihrige zu berechnen. Freylich können auf diese Art einige eine glücklichere, andere eine unglücklichere Periode treffen; allein das ist kein Einwurf gegen den Grundsatz. Diesem unvermeidlichen Zufall muß sich jedweder unterwerfen. Liegt gleich die Schuld an den Tabellen, die man vielleicht
in

in der Folge ändern muß, so macht doch dieß keine Aenderung in der Art der Berechnung. Wer eintrat, trat ein unter der Bedingung, es auf die zum Grunde gelegten Tabellen wagen zu wollen. Er gewinnt, was nach diesen gewonnen wird, oder vielmehr erhält zurück, was zu viel bezahlt wird, muß aber auch nachschießen, was er zu wenig gegeben hat.

Wenn bey einer Gesellschaft, wo in jedem Termin neue Interessenten hinzukommen, *genau* gerechnet werden sollte, so müßte die Abrechnung auch *in jedwedem Termin* gemacht werden, um mit den abgetretenen Interessenten abzuschließen. Nachher ist weder der Ueberschuss bequem zu vertheilen, noch der nöthige Nachschuss mehr beyzubringen. Ist aber die ganze Abweichung des Erfolgs von den Tabellen, er falle zum Vortheil oder zum Schaden, von keiner grossen Erheblichkeit, so kann es genug seyn, *alle zwey bis drey Jahre* den Cassenzustand zu berechnen. „Die in den Zwischenzeiten abgegangene Interessenten können füglich als solche angesehen werden, mit denen nach der nächst vorhergegangenen Abrechnung nichts weiter abzumachen ist.“ Dieß kann auch, zumahl bey einer *fortdauernden* Gesellschaft, nicht viel Unterschied für die Nachbleibenden ausmachen. *Stirbt die Gesellschaft aus*, so ist schon mehr Rücksicht darauf zu nehmen, daß man die Abrechnungstermine etwas kürzer setze, wenn

die Zahl der Interessenten kleiner geworden ist. Dieß findet sich aber von selbst.

21.

Dieß ist die allgemeine Auflösung des Problems, angenommen nämlich, die Gesellschaft habe sich selbst garantirt; ihr entbehrlicher Ueberschufs könne also unter die Interessenten vertheilet werden, dagegen der Defect, der sich nicht selbst hebet, von ihnen ersetzt werden müsse. Ist ein Ueberschufs vorhanden, so wird man die meisten mahle leicht zurecht kommen. Allein wenn sich Defecte finden, so entstehen mehrere Schwierigkeiten, die unauflösbar seyn können, woferne man nicht zum voraus in dem Grundplan hierauf gedacht, und die alsdenn zu nehmenden Maßregeln bestimmt hat. Dieß macht noch einige Bemerkungen nothwendig.

Hat man Einsatz Tabellen zum Grunde gelegt, die nach sichern Mortalitätstafeln, auf die Art, wie es seyn muß, berechnet sind, so ist eine solche Abweichung des Erfolgs, das man die Tabellen für fehlerhaft erklären müsse (§. 12.), nicht zu befürchten. Oder wenn das ja einmahl sich eräugnen sollte, so wird eine leichte Correction alles heben können. *Ist die Casse garantirt*, so darf gar nichts darüber verabredet seyn. Der Garant muß in diesem Fall büßen. Aber wo kein Garant ist, und wo man nur einigen vernünftigen Grund hat, gegen die Einsatz Tabellen mißtrauisch zu seyn, da ist es nicht
nur

nur nützlich, sondern nothwendig, wohl vorher zu überdenken, was in einem solchen Fall geschehen solle. Dieß ist auch bey den besten Tabellen so, wenn die Gesellschaft aus einer zu kleinen Zahl von Interessenten besteht. Denn die Abweichung von der mittlern in den Tabellen angenommenen GröÙe kann alsdenn bey einzelnen Personen stärker ausfallen.

Ueberhaupt glaube ich, müsse es bey jedweder Art von Versorgungsanstalt, die nicht garantirt wird, zur Regel gemacht werden, daß in dem Plan des Instituts über den erwähnten Punct, was nämlich geschehen solle, wenn die Tabellen nicht ausreichen, alles gehörige bestimmt sey. Ist das bey ganz sichern Tabellen eine überflüssige Sorgfalt, so ist sie doch auch unschädlich. Nachher, wenn der Fehler offenbar wird, ist das Interesse der Theilnehmer zu verschieden, als daß eine Vereinbarung unter ihnen zu hoffen sey. Was der Natur der Sache nach das billigste ist, ist dann auch gerecht. Aber über jenes sind die Urtheile eben so verschieden, als über dieses. Die Wittwen werden, wenn die Tabellen nicht ausreichen, wünschen, daß man zur Ersetzung des zu wenig bezahlten sich entschliesse. Sollen sie gleich selbst als Interessenten dabey angesehen werden, also auch zu der Ersetzung zu ihrem Theil beytragen, so gewinnen sie doch, wenn ihnen für künftig die volle Pension gesichert wird, zumahl wenn ihre Ehemänner auf Beytragsfuß vorher gestanden haben. Denn in diesem Fall macht

dasjenige, was sie nachzugeben haben würden, einzelne Fälle ausgenommen, so viel nicht aus. Die Ehemänner hingegen, deren Frauen noch leben, werden lieber sehen, daß die Gesellschaft ganz aufhöre, oder werden auszutreten suchen, zumahl wenn sie noch in andern bessern Instituten aufgenommen werden können. Diese letztern sollen für das Vergangene nachschiefsen, und in Hinsicht des künftigen haben sie noch so viel zu zahlen, als nothwendig ist, das ist, so viel als wofür ihnen in andern nach zutreffenden Tabellen berechneten Instituten dieselbe Anwartschaft gegeben wird. Dieß muß sie natürlicherweise geneigt machen, ihre alte Verbindung aufzuheben.

Die Art, wie die Defecte zu berechnen sind, kommt, wie sich versteht, nicht eher zur Anwendung, als wenn schon ausgemacht ist, daß sie ersetzt werden sollen. Ist ein anders verabredet, so bedarf es jener Aufrechnung nicht. Daß die Gesellschaft ausdrücklich sich selbst garantirt habe auf die angenommenen Tabellen, daß sie also sich verpflichtet habe, diese durchzusetzen, und alles, was die Casse dabey zu kurz kommt, pro rata über sich zu nehmen, daß dieß ausdrücklich oder stillschweigend verabredet sey, ist die Bedingung, die hier voraus gesetzt wird. Sonst kommt nichts auf die Frage an, *wie* die Rechnung zu machen sey?

22.

Man kann aber andere Mafsregeln auf diesen Fall, wenn nämlich die Tabellen mangelhaft sind, bestimmt haben. Es ist manches hiebey willkührlich, oder so, dafs man nicht sagen könne, es sey mehr durch die Natur der Sache und des Zwecks nothwendig als ein anderes. So lange die Defecte nicht so grofs sind, dafs man die Tabellen für unzulänglich erklären mufs, wird ein Interessent auch nicht leicht Gründe haben, sich von der Gesellschaft zu trennen. Er kann durch eine Vertauschung derselben mit einer andern nichts, oder nicht viel gewinnen. Denn wo er sich auch einläfst, so mufs er doch entweder selbst das Risiko für die Zukunft mit übernehmen, oder dafür etwas aufopfern. In seiner Gesellschaft hat er zwar so viel schon verloren, als dies austrägt, aber er kann es noch wieder gewinnen in der Folge. Der andere Theil des Defects, der in diesem Fall, (nach §. 12.) gröfser ist, als das anfängliche Risiko, will, auf einzelne vertheilet, so viel nicht sagen (man sehe Beyspiele im §. 37. der *Abh. vom Risiko*), dafs ein Interessent darum die Gesellschaft zu verlassen habe. Meiner Meinung nach ist es ein Grundsatz, „dafs wenn „nichts über die Garantie festgesetzt ist, und die Gesellschaft blofs auf sich selbst beruhet, so müssen die „einmal angenommenen Tabellen, so lange sie nicht in „dem bestimmten Grade mangelhaft sind, beybehalten, „das Institut nach denselben fortgesetzt, und also die

„Defecte von den Interessenten, so weit sie der Erwartung nach sich nicht selbst heben können, wieder ersetzt werden, ohne dafs es einem Mitgliede erlaubt sey, eigenmächtig der Fortsetzung, und dem Nachschufs zur Ergänzung sich zu entziehen.“ Will man sich willkührlich zu etwas anders vereinbaren, die Tabellen etwan für die Zukunft abändern, oder die Pensionen vermindern, oder gar aus einander gehen, so steht das frey, wenn alle einstimmen. Allein ich meine, dieß erfordere alsdenn auch Unanimität in den Beschlüssen, und nicht blofs eine *Mehrheit*, weil keine Mehrheit auf einer Seite einen noch bestehenden Contract aufheben kann.

23.

Sind aber die Tabellen mangelhaft (§. 12.) so entsteht die Frage: was geschehen könne oder müsse? Man darf noch eben nicht in dem nämlichen Termin, wenn sich so findet, die ganze Sache aufgeben; man kann den nächstfolgenden abwarten, ob nicht vielleicht der Defect wiederum in die Grenzen zurückkomme, wie er mit den Tabellen bestehen kann. Zu erwarten ist dieß aber nicht. Daher auch nicht lange ein solcher Versuch fortgesetzt werden darf.

Wird die Mangelhaftigkeit der Tabellen offenbar, so kann das Institut nach seiner Grundanlage nicht mehr bestehen; kann es aber dennoch nicht erhalten, nicht ausge-

ausgebessert, nicht umgeändert werden, oder ist es gleich ganz aufzugeben, und die Auseinandersetzung der Interessenten zu beschaffen? Hier ist es ganz etwas anders, was geschehen *solle*, wenn nichts darüber zum voraus bestimmt ist? Was rechtlich ist, oder was geschehen *müsse*, und ein anders, was geschehen *könne*? Auf jenes lasse ich mich nicht ein, nur von dem, was geschehen *kann*, und was man zum voraus in dem Plan für diesen Fall hätte festsetzen *können*, will ich noch etwas anfügen. Es gehört zwar nicht zu der Aufgabe, die hier zu untersuchen ist. Allein ich hoffe, man werde diese Anmerkungen leicht mitnehmen. Auch enthält das, was geschehen kann, und zum voraus hätte verabredet werden können, so viel ich sehe, den Grund, woraus am Ende beurtheilet werden muß, was im vorkommenden Fall das angemessene und billige, und dann auch das gerechte ist, wenn keine positive Gesetze vorhanden sind. Indessen scheint mir folgendes so klar als ein Grundsatz zu seyn.

„Wenn die Tabellen mangelhaft sind, also das Institut nach seiner Grundverfassung unbestehbar, so sey der gesellschaftliche Contract, der nur unter der Bedingung eingegangen ist, daß man mit den gewählten Tabellen ausreiche, für sich als ungültig aufzuheben, und die Gesellschaft auseinander zu setzen.“

Geschieht das nun nicht, so müsse es jedoch jedem einzelnen Interessenten, der nicht bleiben will, frey stehen, auszutreten, und sich zurückgeben zu lassen, was ihm aus dem Cassenbestand

stand

stand nach einer richtigen Auseinandersetzung zu gute kommt. Es muß jedem Einzelnen frey stehen, sich zu trennen oder nicht zu trennen, er thue wohl daran oder nicht. Wie alsdenn aber mit ihm abzurechnen sey, und was er zurückfordern könne, davon nachher. Genug daß in Rücksicht seiner es so anzusehen, als wenn die Gesellschaft aufhöre, wenn gleich der übrige Theil nach einem verbesserten oder veränderten Plan ihre Verbindung fortsetzen will.

24.

Es läßt sich *erstlich* auf diesen Fall festsetzen, *daß* die einmal zum Grunde gelegten Tabellen als schlechthin von der Gesellschaft selbst garantirt angesehen, und also *auf beständig behalten* werden, also auch jeder Cassen-Mangel von den Interessenten verhältnismäßig ersetzt werden solle. Auf diese Art läßt sich ein Institut fortsetzen, wie schlecht es auch Anfangs berechnet ist. Allein man sehe sich für, daß dieß nicht eine unvernünftige Verpflichtung werde, die zuletzt unmöglich zu erfüllen ist. Soll sie das nicht werden, so ist folgendes *nothwendig*.

1) Es müssen die Tabellen, wornach die Praestanda berechnet sind, doch von der Art seyn, daß aus ihnen das Deficit der Casse berechnet werden kann; oder auch man muß zum voraus gewisse Tabellen annehmen, die in dem Fall gelten sollen. Wie kann sonst nur eine
Aufrech-

Aufrechnung angestellet und der Defect gefunden werden? Bey dem alten Calenbergischen Institut war hieran gar nicht gedacht. Denn nach den Einsatztabeln liefs sich weder das künftige Bedürfnis noch die künftige Foderung der Cassen ausmachen. Da war keine Tabelle für Leibrenten noch für Eherenten.

Sind Tabellen, die eine solche Rechnung möglich machen, zum Grunde gelegt, so ist, wenn diese fehlerhaft befunden sind, die Frage: ob die Berechnung der zu ersetzenden Defecte, nach diesen fehlerhaften, oder nach andern angestellet werden solle? Das letzte ist nicht ganz nothwendig. Man kann bey den erstern, die man garantirt hat, bleiben; und wenn diese nicht gar zu sehr fehlerhaft sind, auch die Ersetzung der entstandenen Mängel nur immer zeitig genug geschieht, bevor der Schaden zu groß ist, so läst sich in der anfänglichen Bahn fortgehen. Gesetzt das auch in jedem Termin von neuen Defecten da sind, so bleiben sie doch in gewissen Schranken. Man muß nur nachschiefsen, was man voraus hätte geben sollen. Allein weil das Nachschiefsen immer schwerer werden kann, auch wenn die Gesellschaft sich beständig ergänzt, so ist es weit vernünftiger, die Berechnung des Cassen-Zustandes nach andern Tabellen anzustellen, so bald sich zeigt, das die zum Grunde gelegten nicht ausreichen. Ist das zum voraus bestimmt, so kann man sich, in Hinsicht der Einsätze und Beyträge, nach den ersten Tabellen noch ferner richten.

richten. Die Casse wird jedesmal nach den richtigen Tabellen wieder in Ordnung gebracht. Aber es ist besser, alsdenn auch die erstern ganz fahren zu lassen.

2) Ist es sehr nöthig, wenn man den Tabellen nicht trauen kann, bald nach dem Anfang, und oft, gar alle halbe Jahre, die Aufrechnung der Casse zu machen. Die Defecte müssen nicht zu stark anwachsen, sonst wird die Ersetzung zu schwer.

3) Die Casse muß von jedem Interessenten etwas in Händen haben, zur Sicherheit, um sich, wenn die Nachschüsse nothwendig sind, bezahlt machen zu können.

25.

Besser ist das zweyte Verfahren. Man bestimme nämlich eine Correction des Instituts, wenn die Tabellen mangelhaft befunden sind, nehme andere Tabellen, und mache nach diesen letztern die Gröfse des vorhandenen Defects aus, der ergänzt werden muß. Die Wittwen, welche schon fällige Pensionen genießen, können ihrer Lage gegen die Gesellschaft gemäß, ganz füglich eben so wie die Ehefrauen als Interessenten betrachtet und also auch zur Schadenserfetzung zugezogen werden. Dabey ist es dann an sich zwar gleichviel, ob das nachzuschießende von den Interessenten in Gelde bezahlet, oder ob so viel am Werth von ihren künftigen Erwartungen, den Wittwen von ihren fälligen, den Ehefrauen von ihrer eventuellen Rente abgezogen werde?

Allein

Allein es ist der Unterschied da, daß wenn man statt des Geldes die Werthe der Pensionen nimmt, so entläßt man in so ferne die Interessenten ihrer Verbindung mit der Gesellschaft, und hebet diese zum Theil auf, was doch nicht seyn soll. Daher müßte die Ersetzung des Defects lieber in Gelde geschehen. Eben darum muß man ihn auch nicht haben zu groß werden lassen.

Sollen die Pensionen heruntergesetzt werden, um den Defect gut zu machen, so ist dabey zu bemerken, daß *diese Verminderung nicht in gleichem Verhältniß bey den fälligen und bey den eventuellen* vorgenommen werden könne, wenn bey allen der Maassstab, wornach die Ersetzung geschiehet, derselbe seyn soll. Eine *Wittwe* sey von gleichem Alter a als eine noch *lebende Ehefrau*, und jener ihr verstorbener Mann sey beym Eintritt in die Gesellschaft so alt gewesen als der noch lebende Mann der letztern, so ist das, was beyde zum Ersatz des Cassen-Mangels nachzuschiesßen haben, einander gleich. Dieß sey Q . Die *fällige* Rente der ersten ist λ_a^- ; die *eventuelle* der letztern $\lambda_a^- - \lambda_{a+b}^-$. Jene hat also noch zu erwarten $\lambda_a^- - Q$; diese $\lambda_a^- - \lambda_{a+b}^- - Q$. Macht nun Q einen gewissen Theil von λ_a^- aus, er sey $= \frac{\lambda_a^-}{n}$, so empfängt die Wittwe künftig nur $\left(\frac{n-1}{n}\right)\lambda_a^-$, wenn sie den Nachschuß durch Kürzung an der Pension bezahlen soll. Die eventuelle Rente der noch in der Ehe lebenden Frau ist $\lambda_a^- - \lambda_{a+b}^-$; wird diese in gleichem Verhält-

Verhältniß herabgesetzt, so ist die Erwartung $\frac{n-1}{n}$ ($\lambda \overline{a} - \lambda \overline{a b}$). Dieß ist um $\frac{1}{n} \lambda \overline{a b}$ mehr als $\frac{n-1}{n} \cdot \lambda \overline{a} - \lambda \overline{a b}$, wie es seyn sollte.

26.

Das *dritte Mittel*, wozu man greifen kann (von den allgemeinen und einfachen ist hier nur die Rede, die zusammengesetztern, die etwan die Klugheit desjenigen, der den Plan entwirft, aus den besondern Umständen ziehen mag, können und brauchen nicht angeführet zu werden), das dritte einfache Mittel ist, daß man auf den gedachten Fall der Unbestehbarkeit der Casse, *die Gesellschaft aufhören lasse*, die Casse für fallit erkläre, und alsdenn den Interessenten, in Verhältniß nach ihren Forderungen die etwan vorhandenen Fonds der Casse zutheile. Wenn dieß zum voraus bedungen ist, so muß jeder Interessent sich darauf gefaßt machen, und es ist kein Unrecht, wenn nachher so verfahren wird. Auch ist so viel, wie vorher schon erinnert, wohl außer Zweifel, daß wenn nichts über diesen Punct bestimmt ist, so müsse doch der Contract, der seiner Natur nach unbestehbar und also null ist, von selbst aufhören, sobald sich zeigt, daß er das ist.

Allein *zwey Punkte* kommen alsdenn zur Frage, erstlich, wie die *Forderungen* der auseinander zu setzenden Interessenten zu berechnen? und zweytens, ob alle
Interessen-

Interessenten bloß nach dem Verhältniß ihrer Forderungen zu schätzen sind, oder ob nicht hier, wie gewöhnlich bey Concurſen, einigen Gläubigern ein Vorzug vor andern beygelegt werden könne und nach der Natur der Sache auch müſſe?

Dafs *Wittwen* und *Ehefrauen* an dem bis dahin entstandenen Defect der Casse zu gleichen Theilen gehen, wenn alles übrige gleich ist, und also bis dahin auch gleich verlieren, scheint sehr natürlich zu seyn. Der Unterschied zwischen ihnen, dafs die *Wittwen* empfangen, die *Ehefrauen* ausgeben, oder doch nicht empfangen, kann darinn nichts ändern. Wenn das nun immer so fort gehen, also in jedem Termin neue Defecte entstehen würden, so würden beyde immerfort auch davon leiden in demselben Verhältniß. Aber die *Wittwen* würden alsdenn auch immerfort etwas empfangen, und die *Ehefrauen* noch immer etwas auszahlen. Diefs hört auf, wenn die Gesellschaft zerrissen wird. Daraus entsteht eine verschiedene Lage beyder Theile. Die *Wittwen* verlieren von neuen; und ihr Schaden in Hinsicht des Künftigen ist unerfetzlich. Sie würden noch immerfort gerne die Defecte zu ihrem Antheil ersetzen, wenn ihre Pensionen ihnen gelassen würden. Die *Ehefrauen* dagegen, die bisher zu wenig gegeben haben, können, zumahl wenn sie auf Beyträge gestanden, nicht nur diese leicht überwinden, sondern sie können durch den Erfolg sogar gewonnen haben. Sie haben die vorigen

Jahre durch ihre Sicherheit für einen zu niedrigen Preis gehabt. Nach richtigen Tabellen hätten sie mehr zahlen müssen. Sie sind aber abgekommen mit wenigern. Ihre Ehemänner, einige etwan ausgenommen, haben Gelegenheit auf andere Art Pensionen für sie zu versichern, und in jedem Fall wird das, was sie bis dahin gegeben haben, und was sie künftig noch geben müssen, weniger betragen, als was sie vom Anfang an hätten aufwenden müssen, wenn sie gleich damals nach richtigen Tabellen gezahlt hätten. Der Unterschied kann grösser oder kleiner, und bey einigen unerheblich seyn; aber etwas ist doch immer da. Am ersten leuchtet dieß ein, wenn sie auf *Beyträge* bey der Casse gestanden haben. Gesetzt ein Ehemann habe nur die Hälfte von dem jährlich contribuirt, was er nach dem wahren Werth der Wittwenrente hätte contribuiren müssen. Nun mag der Cassenbestand nichts, oder auch seine Foderung an selbigen so unerheblich seyn, daß sie für nichts zu rechnen ist. So kann er sich anderswo einlassen. Da muß er zwar mehr geben, als er hätte geben müssen, wenn er gleich im Anfang hier eingetreten wäre, weil der Beytrag jetzo für ihn grösser ist, als er vorher bey dem jüngern Alter beyder Eheleute gewesen seyn würde. Aber was er erspart hat die vorhergehenden Jahre durch, ist grösser, als was er künftig mehr zu geben hat.

Wenn *baare Einsätze* gezahlet sind, so wird folgender allgemeiner Ueberschlag dasselbe Resultat geben, nur daß

dafs hier der Unterschied kleiner seyn kann. Das Alter der Eheleute sey bey dem Eintritt bey allen Ehen gleich. Bey der Aufrechnung der Casse finde sich der ganze *Defect* D , nach seinem *dermaligen* Werth; die Zahl der vorhandenen *Wittwen* sey m , die Zahl der stehenden Ehen, oder der *Ehefrauen* n , und die Zahl der *gestorbenen Frauen* oder der abgegangenen Interessenten, t . Alsdenn ist das, was die *Wittwen* hätten gleich Anfangs mehr geben müssen, bey richtigen Tabellen nach seinem *dermaligen* Werth, $\frac{m}{m+n+t} \cdot D$. Was die *Ehefrauen* hätten mehr geben müssen, $\frac{n}{m+n+t} \cdot D$.

Hiemit vergleiche man, was jede Classe bey der Auseinandersetzung nach dem obigen Grundsatz empfangen soll. Was in Cassa seyn sollte, beträgt 1) so viel als die Foderungen der *Wittwen*. Diese sind *fällige Renten*, oder *Leibrenten*, man setze sie nach ihrem *damaligen* Werth, $m \lambda \overline{a}$. 2) Die Foderungen der *Ehefrauen*. Dieß sind eventuelle Wittwenrenten, die sich belaufen auf $n (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{a} \overline{b})$.

Der vorhandene Cassenbestand ist

$$m \lambda \overline{a} + n (\lambda \overline{a} - \lambda \overline{a} \overline{b}) - D.$$

Wird nun dieser Cassenbestand nach Verhältniß der Foderungen vertheilet, so ist das, was den *Wittwen* zu-

$$\text{fällt, } m \lambda \overline{a} - \frac{m \lambda \overline{a}}{(m+n) \lambda \overline{a} - n \lambda \overline{a} \overline{b}} \cdot D,$$

das ist $\frac{m \lambda_a}{(m+n) \lambda_a - n \lambda_{ab}}$ $\cdot D$ weniger, als ihre Forderungen sind. Da aber

$$\frac{m \lambda_a \cdot D}{(m+n) \lambda_a - n \lambda_{ab}} = \frac{m}{m+n} \cdot D \cdot \left(1 + \frac{mn \lambda_{ab}}{(m+n) \lambda_a - n \lambda_{ab}} \right)$$

das ist *größer* als $\frac{m}{m+n} D$ ist, so ist der Verlust der

Wittwen an ihren Forderungen größer als $\frac{m}{m+n} \cdot D$, und

also auch größer als $\frac{m}{m+n+t} \cdot D$, das ist, *größer als was sie hätten bezahlen müssen, wenn sie von Anfang an nach richtigen Tabellen bezahlt hätten.*

Was die in der *Ehe lebenden Frauen* erhalten, beträgt

$$n (\lambda_a - \lambda_{ab}) = \frac{n (\lambda_a - \lambda_{ab}) \cdot D}{(m+n) \lambda_a - n \lambda_{ab}}. \quad \text{Da ihre}$$

Forderung $n (\lambda_a - \lambda_{ab})$ ist, so verlieren sie daran das letztere Stück. Diefes Stück aber ist *kleiner* als

$$\frac{n (\lambda_a - \lambda_{ab}) \cdot D}{(m+n) \lambda_a - (m+n) \lambda_{ab}}, \quad \text{weil dorten der Nenner}$$

größer ist, folglich auch kleiner als $\frac{n}{m+n} \cdot D$. Es ist nämlich

$$\frac{n (\lambda_a - \lambda_{ab}) \cdot D}{(m+n) \lambda_a - n \lambda_{ab}} = \frac{n}{m+n} \cdot D - \frac{mn \lambda_{ab} \cdot D}{(m+n) \lambda_a - n \lambda_{ab}}$$

das ist hier so viel *unter* $\frac{n}{m+n} D$, als der Verlust bey

den Wittwen *über* $\frac{m}{m+n} D$ war. Nun hätten diese

Ehefrauen $\frac{n}{m+n+t} \cdot D$ mehr als geschehen ist zahlen

sollen, und weil auch diefes *kleiner* ist als $\frac{n}{m+n} \cdot D$,

so

so könnte bey ihnen beydes vielleicht gegen einander aufgehen. Allein wenn man überlegt, daß entweder t eine kleine Zahl ist, in Vergleichung mit m und n in den ersten Jahren, im Fall nämlich die Abrechnung bald nach dem Anfang der Gesellschaft gemacht wird; oder daß, wenn die Gesellschaft schon viele Jahre bestanden hat, die Differenz auch größer werden kann, so wird man leicht übersehen, es werde überhaupt so herauskommen, daß die Ehefrauen der schlechtern Tabellen wegen Vortheile gehabt, die Wittwen aber Schaden gelitten, wenn der Cassenbestand bloß nach dem Verhältniß der Forderungen vertheilet wird. Daher glaube ich, sey es nicht billig, dieß letztere als eine Regel in einem Plan festzusetzen. Sollte nicht den Wittwen etwas voraus gegeben werden, so viel wenigstens, *daß der Schaden auf beyden Seiten gleich werde*, der nämlich von der Fehlerhaftigkeit der Tabellen entspringt, wenn dieß anders noch angeht, sollte auch die ganze Cassé ihnen überlassen werden müssen? Kann es also, wenn in dem gesellschaftlichen Contract nichts über die Art der Auseinandersetzung bestimmt ist, als ein Rechtsgrundsatz, der aus der Natur der Sache folge, angesehen werden, daß der Cassenbestand in Verhältniß der Forderungen zu vertheilen sey? Meiner Meinung nach werden die Wittwen dabey zu hart behandelt. Man sieht sie gewöhnlich als die Gewinner beym Spiel an. Das sind sie, aber leider sind sie. Von dieser Seite kann die

Sache nicht in Betracht kommen. Nicht die *wirklichen Hebungen* werden bezahlet, sondern die *Sicherheit* auf den Fall, wenn sie nöthig sind, sie zu haben, die eventuellen Pensionen. Jeder empfängt und genießet so gleich was er gekauft hat. Die Frage kann also nur seyn: was ist zu verfügen für den Fall, daß man sich in dem wahren Werth dieser Sicherheit geirrt und zu wenig bezahlet hätte? Sollte denn nicht gleich viel zu wenig, für gleiche Pensionen, von *allen* gegeben seyn, wenn nämlich die übrigen Umstände gleich sind?

27.

In Hinsicht der *Foderungen der Interessenten* ist noch darauf zu denken, daß man die Tabellen zum voraus bestimme, wornach sie bey der Auseinandersetzung zu berechnen sind. Man kann diejenigen nehmen, die man einmal angenommen hat, wornach die Erwartungen Anfangs berechnet sind, und worauf der Contract gemacht ist. Aber da diese fehlerhaft befunden werden, so ist es, wie vorher schon erinnert, vernünftiger, andere, wovon man weiß, daß sie zutreffen, zum voraus auf diesen Fall anzunehmen.

Wie aber die Foderungen zu berechnen sind nach den Tabellen, ist bey baaren Einfätzen eben vorher schon gewiesen.

Die *Foderungen der Wittwen* bleiben dieselben, wenn ihre Ehemänner auf *Beyträge* gestanden haben. Aber
die

die der *Ehefrauen* werden verändert. Denn diese sind der Casse noch eine Ehereute schuldig, so groß, als ihr jährlicher Beytrag ist. Dieser Beytrag sey b , so ist die Foderung einer jeden an die Casse, die eventuelle Wittwenrente $\lambda \overline{a} - \lambda \overline{a} b$; hingegen ihre *Schuld* $b \lambda \overline{a} b$. Also ihre *reine Foderung*, $\lambda \overline{a} - (1 + b) \lambda \overline{a} b$.

Sind wiederum m Wittwen da, und n Ehefrauen, so ist die Summe aller Foderungen an den Cassenbestand $(m + n) \lambda \overline{a} - n (1 + b) \lambda \overline{a} b$; wenn nämlich das Alter bey allen Ehepaaren im Anfang gleich gewesen ist.

28.

Bey der *vormaligen Calenbergischen Gesellschaft*, um diess auch noch im Vorbeygehen zu berühren, hatte die Auseinandersetzung der Interessenten viele Schwierigkeit. Es waren eigentlich *Beyträge* gegeben worden, ausser einigen Geldern bey dem Eintritt, die man *dupla* nannte, und nachzuzahlende Zinsen, die als verloren hingegeben worden, und die demnach als baare Einfätze anzusehen waren. Hier entstand bey der Auseinandersetzung der Interessenten 1) die vorläufige Frage, nach welchen Tabellen die Wittwenrenten zu berechnen? Doch über diese Frage hätte man am Ende sich leicht vergleichen können.

2) Als geleistete Beyträge waren erstlich die *Zinsen* der zur Hypothek in die Casse bey dem Eintritt niedergelegten Jahrshebung der Pensionen anzusehen. Diese

hatten immer die gleiche Grösse. Was ausser diesen aber noch halbjährlich beygebracht war, und was eigentlich Beytrag hiefs, war veränderlich. Diefs war blofs nach Verhältnifs der aufzubringenden Pensionen bezahlt, jedoch so, dafs die Interessenten sich anheischig gemacht, bis auf eine bestimmte Grenze, nämlich 8 Pfennige aufs Simplum, nach der im Plan angenommenen Sprache, es erhöhen zu lassen. Es hatten daher die Interessenten in den ersten Jahren weniger an Beyträgen bezahlt, als in den letztern. Nach welchen von diesen veränderlichen Beyträgen sollten nun die Werthe der Renten, die sie zu fodern hatten, gerechnet werden? Dafs einige weniger bezahlt hatten, war blofs eine zufällige Folge der Umstände. Wenn gleich in den ersten Terminen die Beyträge zu ihrer höchsten Grösse gestiegen wären, so hätten die Interessenten sich nach dem Plan solches gefallen lassen müssen. Sie zahlten im Anfange zwar wenig, und hofften in langer Zeit nicht viel zu bezahlen. Aber da sie doch auf den höchsten Beytrag rechnen mußten, so war es eine Frage, ob das von ihnen nach den Umständen gezahlte als ihr wirklich geleisteter Beytrag zu betrachten, und blofs nach der Grösse desselben auch die Grösse der eventuellen Pensionen zu berechnen, die sie als ihre Foderung aufführen konnten? Sie hatten doch alles geleistet, was nach dem Plan von ihnen gefodert, und als hinreichend für ihre Anwartschaft gefodert war. Konnten sie nicht verlangen, so
angesehen

angesehen zu werden, als hätten sie alle in dieser Hinsicht dasselbe geleistet, nämlich alle, sowohl die weniger, als die mehr gegeben hatten, das geleistet, wozu sie sich nach dem Contract verpflichtet hatten, und was, rechtlich die Sache betrachtet, alles war, was sie zu leisten hatten? Dafs zufällig einige mehr, andere minder gegeben, ohne ihre Schuld, war das ein Grund, ihre Forderungen nach dieser unverschuldeten und zufälligen Verschiedenheit schätzen zu lassen? Nach dem Contract hatten sie ihre Anwartschaften *völlig* bezahlt; mußten diese nicht also auch ohne Kürzung als Forderungen an die Casse ihnen zugestanden werden?

3) Es war die Frage: nach *welchen Beyträgen* sollten die *Eherenten* gerechnet werden, welche die stehenden Ehen noch schuldig waren? Es liefs sich voraussehen, dafs die Beyträge bald bis zu ihrer höchsten Grenze gestiegen seyn würden? Aber noch waren sie nicht dahin, als die Auseinandersetzung vorgenommen werden mußte. Es kam in Vorschlag, die wirklich gezahlten Beyträge auf ihren Werth bey dem Eintritt in die Gesellschaft zu reduciren, daraus die *mittlere Gröfse* des jährlichen oder halbjährlichen Beytrags zu berechnen; aus dieser wiederum den Werth der dadurch bezahlten Anwartschaft, und darnach auch die Gröfse dessen, was ein stehendes Ehepaar der Zeit an die Casse noch schuldig sey, zu bestimmen. Hat dies mehr Gründe für sich, als wenn man die zu fordernden Anwartschaften, und

die zu zahlenden Eherenten, beyde nach ihrem wahren Werth, nach richtigen Tabellen berechnen, und voraussetzen wollte, es sey jede Erwartung völlig bezahlt, und jede noch schuldige Zahlung auch völlig nach ihrem wahren Werthe zu leisten? Ich gestehe, ich kenne keine Grundsätze, woraus man beweisen könne, es sey die eine Art zu rechnen mehr der Natur der Sache gemäß, mehr nothwendig und mehr gerecht und billig als die andere. Dem Contract schien mir die letztere am gemäsesten zu seyn.

4) *Wie sollten die als verloren hingeebene Antrittsgelder angesehen werden? Als Einsätze zu einer Pension, oder als baare Gelder, die als reine Forderungen mit ihren Zinsen aufgeführt werden konnten? Nach welchem Grundsatz waren sie das erstere und nicht das letztere? Da in dem Plan gar kein Maassstab war, wornach ihr Werth als Einsätze bestimmt werden konnte, so mußte solches nach andern Tabellen geschehen. Da kam man wiederum auf die Frage: sind die Interessenten genöthiget, nach diesen letztern sich richten zu lassen, da sie sich nie ihnen unterworfen hatten, und auf die, wenn man gewußt, daß es nothwendig sey, sich nach ihnen zu richten, sie sich nicht eingelassen haben würden.*

Ich gestehe, diese Zweifel haben mich abgehalten, solchen Auseinandersetzungs-Methoden, als Hr. *Floren-court*, und damals in der Calenbergischen Angelegenheit, die

die Herren *Karsten* und *Kritter* vorgeschlagen, meinen Beyfall zu geben. Billig, wenn anders hier Billigkeit und Gerechtigkeit zu trennen war, schien sie mir noch weniger zu seyn. Die Foderungen *der Wittwen* wurden, obgleich als Foderungen auf fällige Pensionen berechnet, sehr heruntergesetzt. Sollten die Wittwen ganz entschädiget werden, so mußten ihnen Leibrenten gekauft werden, nach ihrem damaligen Alter. Was sie also durch die Aufhebung des Contracts litten, bestand in dem Unterschied zwischen dem Werthe ihrer Leibrenten und dem, was ihnen nunmehr nach dem Verhältniß ihrer Foderungen, aus dem vorhandenen Cassenbestand zufallen konnte. Das letzte war sehr gering in Vergleichung mit dem erstern.

Dagegen konnten die Ehefrauen sich das, was sie verloren, durch einen baaren Einsatz oder durch Beiträge nach richtigen Tabellen wieder erwerben. Die wenigen ausgenommen, deren Männer Krankheit oder Alter von solchen Instituten ausschloß. Alsdenn verloren die Ehefrauen nichts mehr, als den Ueberschuß dessen, was sie nach andern Tabellen geben mußten, über das, was sie hätten in der Gesellschaft geben müssen, worin sie waren, wenn diese Bestand gehabt. Das war ein viel geringerer Verlust als der Wittwen ihrer. War es gerecht und billig, daß die eine Parthey aus dem Cassenbestand ihren kleinern Schaden noch zum Theil vergütet haben wollte, da die andere, auch wenn sie alles behielte,

behielte, was da war, noch mehr leiden mußte als jene? Dafs man den Ehefrauen anmuthen wollen, um den Schaden der Wittwen bis zur Gleichheit mit dem ihrigen zu bringen, von neuen noch etwas herzugeben, noch mehr, als sie bisher verwandt hatten, ging unmöglich an. Aber wenn sie an dem Cassenbestand Anspruch machen wollten, um ihren Schaden zu vermindern, da der andern Parthey ihrer viel gröfser war, und nicht diese, sondern jene die Aufhebung der Gesellschaft verlangte, so war das etwas, wovon ich nicht sehe, wie es sich auch nach den Grundsätzen der Gerechtigkeit hatte durchsetzen lassen. Man sagte zwar mit Hrn. *Floren court*, das Recht sey den Wittwen hart, das Herz müsse für sie sprechen. Ich gestehe, ich glaube, auch die Vernunft spreche für sie, und vielleicht, wenn der Proceß seinen Fortgang gehabt, mögten auch die Richterstühle für sie gesprochen haben.

So war meine Meinung. So schien es auch ausser dem Hrn. *von Drateln*, den beyden würdigen Männern, dem Herrn *Archiaten Hensler* und dem Herrn *Prof. Büsch*, mit denen ich gemeinschaftlich das Interesse eines grossen Theils der Genossen wahrzunehmen hatte. Noch ehe ich ihr Gehülfe bey diesem Geschäfte ward, hatten sie schon zum Grundsatz genommen, dafs die Genossen an den eigentlichen Cassenbestand der Gesellschaft, der in den aufgesammelten Zinsen bestand, keinen Anspruch machen, sondern ihn ganz den Wittwen überlassen

überlassen müßten. Wir hatten das Interesse der Genossen zu besorgen, aber wir hatten nicht den Auftrag, gegen die Wittwen ungerecht zu seyn, nicht den, die Vortheile unserer Committenten auf jede Art, billig oder unbillig, zu vergrößern. Wir hielten es daher in dem Proceß auch gar nicht für gerathen, uns mit den Wittwen einzulassen, und diesen unsere Forderungen entgegen zu setzen. Wir foderten das, was wir glaubten fordern zu können, da, und von denen, wo und von welchen wir glaubten, es fodern zu müssen, von der Landschaft nämlich, mit der wir contrahirt hatten, und verwiesen die Wittwen auch dahin. Von Anfang an giengen unsere Vorschläge schon auf den Vergleich, der am Ende bis auf einige Nebenpuncte, worin zur Vermeidung eines kostbaren und mühseligen Processes nachgegeben werden mußte, angenommen worden ist, daß nämlich den Wittwen der ganze Zinsfond, den man als Cassenbestand ansehen konnte, überlassen wurde. Schade fürs Institut, daß man nicht früher sich dahin vereinigte. Es schien dieß das einzige Mittel zu seyn, die Knoten zu lösen, wenn gleich ein paar Fasern durchgeschnitten werden mußten, die zu verwickelt und zu wenig erheblich waren, um sich dabey aufzuhalten.

29.

Die nächste Anwendung, die von der bisherigen Untersuchung gemacht werden kann, wird bey der *veränderten Calenbergischen Gesellschaft* vorkommen.

Nach

Nach dem *neuen approbirten Plan* wird 1) den *Genossen* die richtige Auszahlung der Pensionen für die Wittwen *garantirt*. 2) Es erhält die *Casse* der Gesellschaft von der *Landschaft* einen *jährlichen Zuschuss* von 6000 Rthl. auf 30 Jahre, was nach 4 Procent gerechnet, so viel ist, als baar 103752 Rthl. Davon soll zunächst der Schaden abgehalten werden, der durch die *Genossen* entstehen wird, die man ohne *Gesundheitscheine* bey der neuen Einrichtung zugelassen hat. Dann aber soll das übrige der *Casse* überhaupt zu gute kommen, und zur Erleichterung der *Genossen* gebraucht werden, falls nicht Defecte entstehen, zu deren Ersetzung er erfordert wird. Auch 3) soll *aller sonstiger Ueberschuss*, sobald erweislich wird, daß er entbehrlich sey, den Interessenten zugerechnet werden. Dagegen 4) im Fall sich dieser *Beyhülfe* ohngeachtet Defecte bey der *Casse* zeigen, die Interessenten, zur Ersetzung derselben eine Erhöhung der tabellarischen *Beyträge* auf 5 Procent (ob der *Beyträge* selbst, oder der versicherten Pensionen, ist nicht bestimmt,) und die Wittwen eine Verminderung der Pensionen auf 10 Procent, sich gefallen lassen müssen; jedoch beydes nicht höher, bis so weit. Noch sind sowohl die *Beyträge* als die baaren Einfätze nach Tabellen berechnet, in denen die Sterblichkeit des weiblichen Geschlechts geringer angenommen ist, als die des männlichen. Auf den Unterschied zwischen ausgesuchten und nicht ausgesuchten Gesellschaften ist dagegen nicht gesehen.

30.

Diese Einrichtung ist zwar im Anfang sehr hart, in der Folge aber sehr vortheilhaft für die Interessenten. Diese sind gedeckt gegen alle Gefahr, und dagegen sicher, daß sie nichts mehr *wirklich* zahlen sollen, als wirklich der Zweck der Gesellschaft erfordert, oder, daß ihnen das zuviel gezahlte zurück gegeben werden soll, wenn sich findet, daß es zu viel ist. Und dann soll ihnen der landschaftliche Zuschuss noch zur Erleichterung seyn. Es wird also nur darauf ankommen, daß der Ueberschuss, sobald er da ist und entbehrlich, auch bald zur Vertheilung gebracht werde, wie es die Absicht nach §. 19. des Plans ist. Und die Erwartung des Ueberschusses ist nicht unwichtig. Es sind so wenig schwache Genossen bey der Gesellschaft geblieben, daß diese im Ganzen als eine Gesellschaft aus dem gemeinen Leben, deren Sterblichkeit nicht grösser ist, als die tabellarische, angesehen werden kann. Die Vortheile aus der mindern Sterblichkeit bey ausgesuchten Mitgliedern können wegfallen, aber Schaden wird auch daraus nicht entstehen. Nach dem Verhältniß der Schwachen zu den Gefunden läßt sich erwarten, daß jene von diesen getragen, und die Gesellschaft, auf die gewöhnliche Art berechnet, sich selbst ohne fernere Unterstützung erhalten könne. Ausserdem sind die Schwachen gewissen Bedingungen unterworfen, wodurch der Schaden, den sie bringen mögten, verringert wird. Und sogar bey denen,

denen, die Gesundheitscheine beygebracht, ist, wenn sie auf Beytragsfuß stehen, die lästige Verpflichtung gemacht, daß, falls die Männer vor Ablauf des vierten Theils der wahrscheinlichen Ehedauer sterben, die Wittwen bis dahin sich die Beyträge von ihren Pensionen kürzen lassen müssen. Diese beyde Bestimmungen lassen schon einigen Ueberschuß erwarten, wenn man auch zugiebt, daß die angenommene geringere Sterblichkeit des weiblichen Geschlechts im Erfolg so seyn werde, als in den Tabellen vorausgesetzt ist. Aber außer jener Erwartung kommt noch der Landschaftliche Zuschuß von mehr als 100000 Rthl. in Betracht, der auf 500 bis 600 Individuen vertheilet, für jeden einzelnen etwas wichtiges werden kann.

31.

Es ist nicht bestimmt, ob im Fall des Ueberschusses auch die *Wittwen* als Theilnehmer angesehen werden sollen? Man hat nur auf die Erleichterung der *Beyträge* gedacht. Sollen diejenigen, welche auf *Capitalfuß* geblieben sind, nicht auch Antheil daran haben? Sie haben in dem vorausgesetzten Fall eben so wohl über das Nöthige bezahlt, als die andern? Und da die Gesellschaft ausstirbt, sollen denn die nach Abgang aller Ehen noch entstehende Ueberschüsse, nicht den zuletzt lebenden Wittwen zu Nutzen kommen? Es wäre zu bedauern, wenn diese Unbestimmtheit künftig zu Mißshelligkeiten
Anlaß

Anlaß geben sollte. Der natürlichen Billigkeit halte ichs gemäß, anzunehmen, *daß alle im Anfang beygetretene Ehefrauen wie Interessenten anzusehen sind, unter denen der Ueberschuss zu vertheilen ist.* Die, deren Männer auf Capitalfuß eingesetzt haben, darum, weil ihre Männer eben sowohl als die Contribuenten, mehr als den wahren Werth der Renten bezahlt haben. Diejenigen aber, deren Männer Beyträge gegeben, müssen ohnedieß nach dem Plan noch gewisse Jahre die zurückgebliebenen Beyträge nachzahlen, oder sich kürzen lassen. Aber wenn diese Bedingung auch nicht da wäre, so leisten doch, nach der Natur solcher Gesellschaften, die Contribuenten eben so viel, als die auf einmal bezahlen. Wie viel oder wenig wirkliche Zahlungen von Einzelnen geleistet werden, kommt nicht in Betracht. Es ist eben ein wesentlicher Zweck solcher Anstalten, daß dies nicht in Betracht kommen soll.

32.

Ein zweyter Grundsatz, den ich hier annehme, ist dieser: *So bald die Frau stirbt, hört die Genossenschaft auf, und alle Theilnehmung an dem Ueberschuss wie an den Defecten.* Die auf Capitalfuß eingesetzt haben, hinterlassen ihr Geld der Gesellschaft, worauf diese noch künftig gewinnen kann, und hier wahrscheinlich gewinnen wird. Sie haben über das nöthige bezahlt. Allein da dies von einem künftigen Erfolg abhängen soll, also

im voraus als ungewiß dahin stehet, so daß es als Zufall anzusehen ist, wenn es geschieht, so hören sie auf gleichsam am Spiel Theil zu nehmen, sobald sie abtreten. Ich rede nur von den *Frauen*, die noch Interessenten bleiben im Wittwenstande. Aber wenn die Frau gestorben ist, so hört ihr Risiko auf zu verlieren, und so auch ihre Erwartung zu gewinnen. Ich will hiemit niemanden in seinem Urtheil vorgreifen. So stelle ich mir aber vor, sey es der Natur des neuen Contracts gemäß.

33.

Diese Grundlätze angenommen, so ist noch eine Schwierigkeit zu berühren. Sie hat nicht viel auf sich, nur in Sachen, wo alles von Mehr und Minder abhängt, ist es bey denen, die dieß nicht schätzen können, so gewöhnlich, Mücken zu Elephanten, als Elephanten zu Mücken zu machen. Sie besteht darinn. Gesetzt es entstehe im Anfang ein entbehrlicher Ueberschuß, und dieser werde vertheilet. Wenn nun nachher sich Defecte zeigen, so ist der schon ausgetheilte Gewinn nur in so ferne wieder zurück zu fodern, so weit er den noch übrigen Interessenten zugefallen ist; was aber an die abgegangenen gekommen, ist unwiederbringlich verloren. Wer ersetzt dieß, im Fall es doch wieder herbey geschaffet werden müßte? Der Garant steht zwar für die Defecte, so weit diese durch die planmäßigen Zahlungen nicht zu heben sind; aber was darum nur fehlen würde,

würde, weil vorher ein Ueberschuss vertheilet ist, hat er nicht garantirt. Und es ist nicht zu erwarten, auch nicht von ihm zu fodern, daß er die einmal bestimmte Garantie noch weiter ausdehnen werde. Soll also der Garant eine Vertheilung des Ueberschusses geschehen lassen, so müssen die übrigbleibenden Interessenten für dasjenige, was an die abgegangenen vertheilet ist, einstehen, ausser daß sie selbst verpflichtet sind, ihre eigene Portionen im Nothfall zurück zu geben.

Daraus würde die Folge entstehen, es sey möglich, daß die an die abgegangenen Interessenten vertheilte Summe so viel austrage, als der ganze an sich mögliche Verlust, den die nachgebliebenen noch leiden können. Wenn das ist, so ist der Garant ganz seiner Garantie entlassen; indem die überlebenden ihm für mehr haften, als er für sie im äußersten Fall zu zahlen schuldig seyn würde. Die letzten sind alsdenn ohne Garantie.

So ist es. Aber was schadet das? Die zurückgebliebenen haben in diesem Fall 1) noch immer so viel in Cassa, als zu ihren Bedürfnissen auf künftig nach eben den Tabellen hinreicht, wornach man Anfangs gerechnet hat. 2) Auch ist so viel als ihr Risiko beträgt, oder der zu erwartende Verlust, noch zurück behalten. Ich setze voraus, daß nach den obigen Vorschriften in §. 9. verfahren sey. Sie sind also dadurch für den künftigen Verlust gedecket, und haben noch einen eben so

großen Vortheil zu erwarten. 3) Sie haben an allen vorhergegangenen Dividenden Antheil genommen; also im voraus schon Vortheil hinweg. Sie können daher ohne Bedenken auf alle fernere Garantie Verzicht thun.

34.

Hält man indessen die zurückbleibenden Interessenten hiedurch noch nicht genug gedeckt, so nehme man zum Grundsatz an, *es solle nichts mehr zur Vertheilung kommen von dem Ueberschuss, als so viel, daß was unvertheilet in der Casse zurückgeleget wird, mit dem zusammen genommen, was bey der Vertheilung auf die übrig gebliebenen Interessenten fällt, dem größten möglichen Schaden gleich sey, den die Casse bey den letztern noch leiden könne.* Die völlige Garantie ist alsdenn immer in den Händen der Interessenten und in der Casse.

Es sey der *Ueberschuss* auf die obige Art berechnet, *S*, die Summe, welche so groß ist, als der *an sich mögliche größte Verlust* bey den fortlebenden Interessenten, *W*, (der nämlich entstehen würde, wenn alle Ehemänner so gleich im nächsten Jahre sterben, und alle Frauen das höchste menschliche Alter erreichen, was erstaunlich unwahrscheinlich ist, so lange die Gesellschaft noch etwas groß ist). Ferner *der Antheil*, der auf die *lebenden* Interessenten fallen wird, *R*, und *der Antheil*, der den *abgegangenen* zugehört, *T*.

Alsdenn

Alsdenn *würde zur Vertheilung kommen*

$$S - (W - R) = R + T, \text{ oder } S - W = T.$$

Das Verhältniß $T : R = h : 1$. Es läßt sich dieß aus dem Verhältniß der anfänglichen *Einsätze*, worauf auch die Beyträge reducirt werden, leicht ausmachen. Demnach ist $S - W = h. R$. So lange also noch *der Ueberschuss nicht grösser ist, als der bey den Nachbleibenden mögliche grösste Cassenverlust, kommt nichts zur Vertheilung*. Es wird also länger dauern, ehe es dahin kommt. Aber die Grösse W nimmt immer ab, nicht nur dadurch, daß die Zahl der Uebrigbleibenden sich vermindert, sondern auch, weil der Werth des grössten möglichen Schadens bey den einzelnen abnimmt. Uebrigens ist diese Grösse leicht zu finden. Man hat aus dem Alter jeder Frau die Grösse der *Zeitrente* auf so viele Jahre als ihre Altersergänzung beträgt. Die Summe ist die an sich mögliche grösste Ausgabe. Man ziehe diese ab von dem *baaren Cassenbestand*, so ist der Rest so groß als W .

Die Berechnung des Dividendi ist das erstemal darnach nun gemacht. Kommt es dann wiederum zur Vertheilung, so giebt sich von selbst folgendes: Die *Uebrigbleibende* haben nun schon von der vorhergehenden Vertheilung etwas in Händen, das auf seinen dermaligen Werth reducirt auch eine Summe ausmacht, sie sey D . So kommt in diesem zweyten Theilungstermin zur

Vertheilung $S - (W - D - R)$, und dieß ist wiederum $= R + T$.

In dem Termin, wo $W = D + R$ ist, wird *der ganze Ueberschuß der Casse vertheilet werden*.

Das ist auch nichts weniger als unbillig. Wenn dieser Fall eintritt, so haben die Uebriggebliebenen schon so viel weg, als bey ihnen in dem äußerst möglichen Fall verloren gehen kann, und ausserdem für die Zukunft alles nöthige nach den Tabellen. Wenn nun auch von dieser Periode an, durch einen sonderbaren Zufall, jedesmal Defecte entstünden, so geht die bloß absolute Möglichkeit des Verlustes nicht weiter, als daß die vorher gewonnenen Portionen wiederum verloren gehen.

Zugleich ist aber auch klar, daß sobald $W - D - R$ *kleiner wird*, als das *größte zu erwartende Risiko für die Zukunft*, so kommt mehr zur Vertheilung bey Befolgung des hier angenommenen Grundsatzes, als wenn zur Regel gemacht wird, *daß jedesmal das größte Risiko zurück bleiben soll*.

35.

Das einmal *Vertheilte* vom Ueberschuß gebrauchen die *contribuirenden* Interessenten zur Erleichterung ihrer Beyträge, die *Wittwen* empfangen es als einen Zuschuß zu ihrer Pension, und verbrauchen es. Die auf *Capital- fuß stehende Ehemänner* lassen es sich zurück zahlen, oder
bey

bey der Casse verwahren, und für ihre künftige Wittwen aufheben. Dabey ist aber zu bemerken, „dass wenn die „Casse es behält bloß als ein Depositum, so müsse es, im „Fall die Frau vor dem Manne stirbt, an diesen zurück „gegeben werden.“ Es ist sein Geld. Soll es in *eine künftige eventuelle Wittwenpension* verwandelt werden, so wird es ein *neuer Einsatz*, und muß als ein solcher geschätzt werden nach den Tabellen. Allein das ist denn so viel, als wenn die Gesellschaft neue Mitglieder aufnähme. Die übrigen Mitglieder, die Contribuenten und Wittwen können sich das zwar gefallen lassen, allein es ist nicht ganz dem Interesse derer gemäß, die zunächst darnach abgehen, weil durch diese neuen Einsätze auch die Werthe von *W* wiederum vergrößert werden, und zwar mehr als auch *D* und *R* vergrößert wird. Soll niemanden zu nahe geschehen, so müssen die auf Einsatz stehende ihren Antheil jedesmal aus der Casse zurück nehmen, wenn diese es nicht als eine *Sparcasse* ihnen aufheben und mit seinem Betrag in der Folge besonders auszahlen will.

36.

Werden nun die von den Interessenten zurück empfangene Theile von ihnen verbraucht, so haben die zuletzt übriggebliebene, wie sich versteht, nichts mehr für die Zukunft, als was nach den Tabellen erfordert wird. Und die Garantie hat aufgehört. Will man

also auch hierauf Rücksicht nehmen, und auf keine Art die letztlebenden Wittwen ungesichert seyn lassen, so kann zu jenem obigen Grundsatz der Vertheilung (in §. 31.), noch hinzugefüget werden, *dass im Fall in dem folgenden Distributionstermin, $W - D - R$ kleiner wird, als das Risiko für die nachbleibende Gesellschaft, so solle dieß letztere Risiko zurück behalten, und also nie mehr als was darüber hinausgeht, distribuiert werden.* Alsdenn hat der längstlebende Interessent, so gar wenn er schon so viel vorher mehr empfangen hat, als er möglicher Weise bey der Leibrente, die für ihn in der Cassé ist, zu kurz kommen kann, ausser dieser Leibrente auch noch das Risiko für den zu erwartenden Verlust. Es kann am Ende ein geringer Rest auf diese Art in der Cassé übrig bleiben, der immerhin ad pios usus verwandt werden mag.

37.

Die Art, wie die Rechnung bey der Cassé zu diesem Zweck zu führen sey, und wie sie am leichtesten zu führen sey, wird sich von selbst geben. Ausser den Columnen, die man (nach §. 3.) zur Berechnung des Cassenbestandes gebraucht, ist nur noch eine nöthig, worin die Werthe der *Zeitrenten auf die Altersergänzung der Frauen*, verzeichnet sind. Ihre Summe giebt jedesmal die möglich grösste Ausgabe. Alsdenn ist alles vorbereitet und das übrige weist die Natur der Sache dem Rechnungsverständigen von selbst an.

Sechste Abhandlung.

Von Wittwenrenten, die von gewissen Bedingungen abhängen.

I.

Die *Wittwenpensionen*, die gleich nach dem Tode des Ehemanns laufend werden, sind der Natur der Sache nach kostbar, und es ist das *Risico*, worin sich der Käufer setzt, eine Summe Geldes unnöthiger Weise auszugeben, nicht unbeträchtlich. Das ist auch sehr begreiflich. Wer durch jährliche Beyträge zahlen will, kauft die Sicherheit auf eine gewisse Summe für seine Wittwe, das ist ein *Wittwenthum* für sie; und giebt dazu kein *Capital* her. Wie würde das möglich seyn, wenn er nicht eine jährliche Last dafür übernehmen wollte, die ihm drückend werden kann? Bey dem *Contribuenten* steht die *Casse* in Gefahr vorzüglich zu verlieren; sie muß also auch die Erwartung haben, viel zu gewinnen.

Diese Art *Wittwenrenten*, die gleich fällig und von bestimmter Grösse sind, sich zu kaufen, ist auf einer Seite ein *Aeusserstes* in Hinsicht des *Risico*; was damit verbunden wird. Man spielt am stärksten. Wenn dagegen ein Ehemann sich für seine Wittwe eine eigene *Casse* macht, oder in eine so genannte *Sparcasse* einsetzt, eine

Summe auf einmal, oder jährlich etwas, solches mit Zinsen auf Zinsen sammlet, so ist das eine Art, für die Wittwe zu sorgen, *bey der für ihn gar nichts* in Hinsicht der Ausgabe *risquirt wird*. Nur steht er in Gefahr, seinen Zweck zu verfehlen. Er kann sterben, ehe das Aufgesammelte zur abgezielten Verpflegung der Wittwe hinlänglich ist. In diesem letztern Fall gehört das nicht zu der Art von Versorgungsanstalten, die durch gesellschaftliche Verbindung entstehen. Ein jeder forget alsdenn für sich allein, und hat auch für sich allein den Erfolg, der entsteht. Es ist keiner, der eine Versorgung erhalten und sicher erhalten kann, die gröfser ist, als jeder sie allein sich hätte durch Sparen verschaffen können. Soll einer dem andern zu Hülfe kommen, der keiner Hülfe bedarf, dem der sie nöthig hat, so kann das nicht seyn, ohne dafs etwas dabey für den einen verloren gehe, was dem andern zu Nutzen kommt. *Blofs Aufsparen der Gelder ist also ein zweytes Extremum*, wobey nichts aufs Spiel zu setzen ist für andere.

Daraus entsteht natürlich die Frage, ob es nicht ein Mittel gebe, zwischen beyden, was vielleicht manchem mehr zu empfehlen seyn mögte? Der Reiche kann leichter eine Summe aufs Spiel setzen, als der wenig hat. Vernünftig ist es für den letztern immer, so wenig zu wagen als möglich ist; nur dafs sein Zweck, den er haben mufs, doch sicher erreicht werde.

Die

Die Pensionen können z. B. *abhängig* gemacht werden *von der Zeit, die der Mann, nachdem er die Rente gekauft hat, noch lebet.* Er habe baar bezahlet, oder er stehe auf Beyträge, so wird weniger von der Casse und von ihm gewaget, wenn die Pension sich nach der Zeit richtet, die der Mann als Mitglied der Gesellschaft fort-lebet. Es hat diese Einrichtung etwas sehr angemessenes. Desto mehr Pension seiner Wittwe erwerben wollen, je länger man lebet, ist ein Vorhaben, das leichter ausführbar seyn muß, als auf einmal ihr alles versichern zu wollen. Diese innerliche Natürlichkeit scheint sie vorzüglich zu empfehlen. Sie kam auch bey der letzten Veränderung der Calenbergischen Gesellschaft in Betracht; und bey dem Project zu einer Mecklenburgisch - Schwerinschen Wittwenkasse war so etwas angebracht.

Ueberhaupt kann ein Ehemann, der seiner Frau eine Pension versichern will, auf manche Umstände Rücksicht zu nehmen haben. Seine Wittwe ist vielleicht auf einige Jahre nach seinem Tode ohnedieß versorget, nur nicht auf viele. Er kann also eine Rente für sie wünschen, die erst nach gewissen Jahren ihres Wittwenstandes fällig wird. Ein anderer braucht für seine Frau bis auf gewisse Jahre ihres Alters hin nicht zu sorgen. Nur wenn sie älter wird, sieht er sie in Verlegenheit. Dieser kann wünschen, so eine Wittwenrente kaufen zu können, die gerade zu diesem Bedürfnis paßt, die auch nicht ehe als bey einem gewissen Alter der Frau fällig werden

werden darf. Ein dritter findet es nicht zu schwer, auf gewisse Jahre starke Beyträge zu geben, nur kann er das nicht auf immer, die ganze Ehezeit durch, beym Anwachs seiner Familie. Dieser wünscht mit Beyträgen, die nur auf eine gewisse Zeit von Jahren dauern, dann aufhören, abzukommen. So mehr. Die Bedürfnisse sind unterschieden, und nur allein für Bedürfnisse sollten die Versorgungsanstalten seyn. Aber deswegen sollten sie auch so eingerichtet werden, daß jederman nach seinem Bedürfnis, und nur darnach sich ankaufen könne. Ein Institut, das allgemein und vollständig seyn soll, erfordert nach dem Beyspiel des Hamburgischen, verschiedene Classen und Arten, die Wittwenpensionen sich kaufen zu können. Auf alle mögliche Verschiedenheiten dabey Rücksicht zu nehmen, ist weder nöthig noch thunlich. Nur die vornehmsten sind in Betracht zu ziehen.

Was von *Wittwenrenten* gilt, läßt sich auf alle Renten, die auf den Fall des Ueberlebens einer Person über die andere empfangen werden, anwenden. Die Gründe, nach denen die Werthe solcher Renten zu berechnen sind, wird man in der *Einleitung zur Berechnung der Renten* finden. Einige Anwendungen davon werden besonders wichtig für die Praxis, worüber ich hier noch einige Sätze nachholen werde.

2.

Aufgabe 1. Die Grösse der jährlichen Beyträge für die Wittwenpension 1 zu finden, wenn diese nur auf eine bestimmte Zahl von Jahren, daferne die Ehe so lange dauert, erleget werden sollen. Das Alter des Mannes sey a , der Frauen b , und die Zahl der Beytragsjahre n .

Auflösung.

1) Man suche den Werth der Eherente $\lambda \overline{a b}$.

2) Auch den Werth der auf n Jahre aufgeschobenen Eherente (nach Einleitung Cap. 3. Abschn. 2. §. 143.) und ziehe diese von jenem ab, so erhält man den Werth einer auf n Jahre dauernden und denn aufhörenden Eherente.

3) Man setze, wie der letztgefundene Werth der nach n Jahren aufhörenden Eherente sich verhält zu der ganzen Eherente, so der jährliche Beytrag auf die ganze Ehezeit, aus den Tabellen, zu dem gesuchten jährlichen Beytrag, der nur n Jahre durch gegeben werden soll.

Beweis. Es ist für sich klar. Es soll der Werth der Wittwenrente durch eine nach n Jahren aufhörende Eherente abgetragen werden. Heißt der Beytrag die ganze Ehezeit durch in den Tabellen, B , so ist $B \lambda \overline{a b}$ der Werth der Rente. Nun sey der gesuchte Beytrag B' , und die aufhörende Rente N , so muß $B' \cdot N$ eben so viel seyn. Also $N : \lambda \overline{a b} = B : B'$.

Ex.

Ex. $a=35$, $b=30$ Jahr, $n=15$ Jahr, so ist nach dem 4 Procentfuß gerechnet, $\lambda \bar{a} \bar{b} = 10,7816$, und $B=0,3050$. (Tab. XXIV. XXVII.) Die auf 15 Jahre *aufgeschobene Eherente* oder Verbindungsrente (nach §. 143. *Einleit.* berechnet) ist 2,5847. Also ist die nach 15 Jahren aufhörende $10,7816 - 2,5847 = 8,1969$, und der gesuchte Beytrag

$$\frac{10,7816 \cdot 0,3050}{8,1969} = 0,4012.$$

Zusatz 1. Soll der *Beytrag veränderlich seyn*, steigen oder fallen nach einem arithmetischen oder geometrischen Verhältniß, so läßt sich die allgemeine Methode, den Werth desselben zu finden, aus den Sätzen des 2ten Capitels der *Einleitung* leicht angeben.

Zusatz 2. Soll der *Beytrag geometrisch abnehmen*, die ganze Ehezeit aber fortdauern, der erste Termin aber voraus bezahlt werden beym Ankauf, so sey β der Beytrag im Anfang, $\frac{1}{n}$ der Exponent des Verhältnisses, A , B , $\frac{1}{n}A$, $\frac{1}{n}B$, u. f. f. die gewöhnlichen Zahlen für das Alter a und b , und man hat

$$\beta + \frac{\beta}{AB} \cdot \left(\frac{\frac{1}{n}A \cdot \frac{1}{n}B}{n \cdot r} + \frac{\frac{2}{n}A \cdot \frac{2}{n}B}{n^2 \cdot r^2} + + \right) = E,$$

dem baaren Werth der hier gesuchten Wittwenrente.

$$\text{Nun ist } \frac{1}{AB} \cdot \left(\frac{\frac{1}{n}A \cdot \frac{1}{n}B}{n \cdot r} + \frac{\frac{2}{n}A \cdot \frac{2}{n}B}{n^2 \cdot r^2} + + \right)$$

der Werth einer Eherente nach dem Zinsfuß nr berechnet.

rechnet. Sucht man diesen (nach §. 139. der *Einleit.*)

er sey N , so ist $\beta = \frac{E}{N+1}$.

Zusatz 3. Das Steigen der Beyträge wird in Praxis nicht leicht vorkommen, weil es natürlicher ist, den Beytrag herunter zu setzen mit den Jahren, wie das Bedürfnis für die Wittwen abnimmt, als ihn zu erhöhen, und mehr für die Rente zu geben, je weniger man ihrer nöthig hat. Das Risiko der Casse wird dabey gröfser.

Zusatz 4. Soll sie aber *steigen* im umgekehrten Verhältniß mit dem Disconto $\frac{1}{r^n}$, so ist

$\frac{1}{AB} \cdot \left(\frac{\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B}}{r} \cdot r + \frac{\frac{2}{A} \cdot \frac{2}{B}}{r^2} \cdot r^2 + + \right)$ so
grofs, als die Dauer der Verbindung. Diese ist C_{ab} , und
 $\beta = \frac{E}{1 + C_{ab}}$.

Zusatz 5. Soll sie steigen im umgekehrten Verhältniß mit $\frac{1}{r}$, $\frac{2}{r^2}$, u. f. f. oder mit $\frac{1}{r}$, $\frac{2}{r^2}$ und so ferner, so wird

$\frac{1}{AB} \cdot \left(\frac{\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B}}{r} \cdot \frac{r}{\frac{1}{A}} + \frac{\frac{2}{A} \cdot \frac{2}{B}}{r^2} \cdot \frac{r^2}{\frac{2}{A}} + + \right)$
oder
 $\frac{1}{AB} \cdot \left(\frac{\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B}}{r} \cdot \frac{r}{\frac{1}{B}} + \frac{\frac{2}{A} \cdot \frac{2}{B}}{r^2} \cdot \frac{r^2}{\frac{2}{B}} + + \right)$
=

$$= \frac{1}{A B} \cdot \left(\overset{1}{-}B + \overset{2}{-}B + \dots + \overset{x}{-}B \right) \text{ oder}$$

$$= \frac{1}{A B} \cdot \left(\overset{1}{-}A + \overset{2}{-}A + \dots + \overset{x}{-}A \right) \text{ wo } x \text{ die Alters-}$$

ergänzung der ältesten verbundenen Person ist. Soll in jedem Fall, das *Verhältniß der Lebenswahrscheinlichkeit für die jüngste Person den Beytrag bestimmen*, also im ersten Ausdruck B, im letztern A zur ältesten Person gehören, so ist der obige Ausdruck jedesmal *die mittlere Lebensdauer der ältesten Person, dividirt durch die Anfangszahl, die zur jüngsten gehört*. Es sey die Frau

die jüngste, und der erste vor auszuzahlende Beytrag $\beta = \frac{N}{B}$, der im nächsten Jahr also $\frac{r. N}{\overset{1}{-}B}$, u. f. f.

so bekommt man $\frac{N}{B} + \frac{N. E_a}{B} = E$, wo E_a die mittlere Lebensdauer des Mannes ist. Folglich

$N = \frac{B. E}{1 + E_a}$, und der erste Beytrag ist $\frac{N}{B}$, welcher in diesem Fall eine kleine Gröfse wird.

Zusatz 6. Soll der Beytrag im Anfang ganz voraus bezahlet werden, dann mit jedem Jahr um $\frac{1}{x}$ tel abnehmen, x für die Altersergänzung der jüngsten Person genommen, so suche man den Werth *einer nach der Ordnung der natürlichen Zahlen steigenden Verbindungsrente*. (nach §. 148. 149.) Diesen mit x dividirt, und von der simplen Verbindungsrente abgezogen, gebe den Rest R,

so ist der *anfängliche Beytrag* $\beta = \frac{1}{R + 1}$.

Und

Und soll der Beytrag jedes Jahr um $\frac{1}{x}$ tel größer werden, so nehme man die Summe der simpeln und der steigenden Verbindungsrente; diese sey S, so ist $\beta = \frac{E}{S+1}$.
Andere Fälle übergehe ich.

3.

Aufgabe 2. Den Werth einer Wittwenrente zu finden, die nach gewissen Jahren (n) von der Zeit des Ankaufs an gerechnet, erst fällig wird.

Auflösung.

1) Man suche eine auf n Jahre aufgeschobene Leibrente für das Alter der Frau, (nach §. 83. Einleit. Cap. 2.)

2) Eben so eine auf n Jahre aufgeschobene Eherente (nach §. 148. Einleit. Cap. 3.). So giebt

3) die letztere von der ersten abgezogen den baaren Werth der gesuchten Rente.

Beweis. Der Beweis erhellet fast unmittelbar aus

der Formel für die Wittwenrente $\frac{(A - \frac{1}{r}A)}{A} \cdot \frac{\frac{1}{r}B}{B r^1} + +$
 $\frac{(A - \frac{n}{r}A) \frac{n}{r}B}{A B r^n} + \frac{(A - \frac{n+1}{r}A) \frac{n+1}{r}B}{A B r^{n+1}} + +$. Von die-

sen Hebungen fallen alle ersten weg, bis $\frac{(A - \frac{n}{r}A) \frac{n}{r}B}{A B r^n}$, diese eingeschlossen, wenn n die Zahl der Jahre ist, um welche die Rente aufgeschoben werden soll. Es ist

II. Theil.

R

nämlich

nämlich A die Anfangszahl für das Alter der Männer a ,
und B für das Alter b der Frauen. Daher bleiben nur

die Glieder $\frac{(A - \frac{n+1}{r} A) \cdot \frac{n+1}{r} B}{A B r^{n+1}} + +$ übrig. Diese sind

$$= \left(\frac{\frac{n+1}{r} B}{B r^{n+1}} + + \right) - \left(\frac{\frac{n+1}{r} A \cdot \frac{n+1}{r} B}{A B r^{n+1}} + + \right), \text{ wo.}$$

von jenes die n Jahre aufgeschobene Leibrente für die
Frau ist, dieses die n Jahre aufgeschobene Verbindungs-
rente. Also

$$= \frac{\frac{n}{r} B}{B} \cdot \frac{\lambda \overline{b+n}}{r^n} - \frac{\frac{n}{r} A \cdot \frac{n}{r} B}{A B r^n} \lambda \overline{b+n} \cdot \overline{a+n}.$$

Ex. Das Alter des Mannes a sey 35, der Frauen
ihres b , 30 Jahr, und $n = 15$ Jahren, so ist, nach dem
Zinsfuß 4 von hundert gerechnet, die auf 15 Jahre

aufgeschobene Leibrente der Frauen $\frac{58,04}{135,35} \cdot 12,0108$

$= 5,1504$, und die auf 15 Jahre aufgeschobene

Eherente $= 2,5847$ (§. 2.)

Folglich die *gesuchte Wittwenrente* $= 2,5657$

Die *volle Wittwenrente* ist $= 3,7594$

Unterschied 1,1937

Für dasselbe Alter ist die auf 10 Jahr aufgeschobene Leib-

rente der Frau, $= \frac{77,90}{135,35} \cdot 13,1565 = 7,5721$,

und die 10 Jahr aufgeschobene Eherente ist

$\frac{220}{409} \cdot \frac{77,90}{135,35} \cdot 19,7091 = 4,4329$. Daher die

10 Jahr

10 Jahr nach dem Ankauf aufgeschobene Wittwenrente
 $= 3,0392$.

Die Zeit des Aufschubs sey 5 Jahre, so ist der Werth,
 $10,8111 - 7,2632 = 3,5479$.

Zusatz. Daraus läßt sich auch der Werth der Wittwenrente berechnen, wenn sie die Bedingung hat, daß im *ersten* Jahr nach dem Einsatz, falls die Pension fällig wird durch den Tod des Mannes, nur $\frac{1}{n}$ tel, im *zweyten*, $\frac{2}{n}$ tel, und so ferner für jedes Jahr $\frac{1}{n}$ tel mehr ausgezahlet werde, bis sie nach n Jahren voll wird, und dann so bleibet. Stirbt der Mann im zweyten Jahr, so fängt die Hebung mit $\frac{2}{n}$ tel an, und so ferner mit $\frac{3}{n}$ tel, wenn sie im dritten Jahr fällig wird. Unter diesen Bedingungen ist das erste $\frac{1}{n}$ tel eine *volle* Wittwenpension; das zweyte $\frac{1}{n}$ tel ist eine auf 1 Jahr *aufgeschobene*, und so weiter. Das letzte hinzukommende $\frac{1}{n}$ tel ist eine auf $n - 1$ Jahre aufgeschobene. Der gesuchte Werth besteht in der Summe dieser einzelnen aufgeschobenen Wittwenpensionen.

5.

Aufgabe 3. Den baaren Werth einer Wittwenrente zu finden, wenn diese gewisse Jahre (n) nach dem Tode des Ehemannes erst fällig wird, in welchem Jahre nach dem Einsatz dieser auch sterbe. Das ist den Werth einer nach dem Tode des Mannes aufgeschobenen Wittwenrente zu finden. Diese kann schlechthin eine *aufgeschobene Wittwenrente* heißen.

Auflösung.

1) Man suche aus den Tabellen die Wittwenrenten für das gegebene Alter des Mannes a , und für das Alter der Frau, welches n Jahre gröfser ist, als das gegebene (b), das ist, für das Alter der Frau $b + n$.

2) Man vermindere diesen Werth in dem Verhältnifs der Zahl der Lebenden im Alter $b + n$, zu der Zahl derselben im Alter b .

3) Diefs letztgefundene discontire man auf n Jahre zurück, so erhält man den gesuchten Werth.

Der Werth der Wittwenrente, wenn die Frau $b + n$ Jahre, der Mann a Jahre alt ist, ist $\lambda_{\overline{b+n}} - \lambda_{\overline{a.(b+n)}}$. Der gefuchte Werth der n Jahre nach dem Tode, des Mannes erst fälligen Rente ist

$$\frac{{}^n\overline{B}}{B} \cdot \frac{A}{r^n} (\lambda_{\overline{b+n}} - \lambda_{\overline{a.(b+n)}}).$$

Beweis. Der Werth der Wittwenrente für das Alter des Mannes a , und der Frau b , ist

$$\begin{aligned} &= \frac{\Delta A}{A} \cdot \lambda_{\overline{b}} + \frac{\Delta {}^1\overline{A}}{A} \cdot \frac{{}^1\overline{B}}{B} \frac{\lambda_{\overline{b+1}}}{r} + \\ &\frac{\Delta {}^2\overline{A}}{A} \cdot \frac{{}^2\overline{B}}{B} \cdot \frac{\lambda_{\overline{b+2}}}{r^2} + + \frac{\Delta {}^x\overline{A}}{A} \cdot \frac{{}^x\overline{B}}{B} \frac{\lambda_{\overline{b+x}}}{r^x}. \end{aligned}$$

Man sehe Cap. IV. der *Einleit.* §. 189.

Dieser Ausdruck (er sey E) giebt für jedes Jahr die Leibrenten, welche an die entstandenen Wittwen zu zahlen sind, um sie auf einmal abzukaufen, da sie sonst
jährliche

jährliche Hebungen empfangen sollten. Weil nun aber jede neue Wittwe statt einer *vollen* Leibrente nur eine *aufgeschobene* haben soll, so kommt der gesuchte Werth (er sey Q) heraus, wenn in dem obigen Ausdruck für E statt der *vollen* Renten lauter *aufgeschobene* auf n Jahre, gesetzt werden.

Eigentlich verhält es sich so. Es ist

$$\frac{\Delta A}{A} \lambda \overline{b} = \frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overline{B}}{B} \frac{(1 + \lambda \overline{b} + 1)}{r}. \quad (\S. 189.$$

Einleit.) Hier ist $\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\overline{B}}{B}$ die Zahl der *entstehenden Wittwen*, denen, um sie auf einmal abzufinden, die erste Hebung 1 und dann für die übrigen die Leibrente $\lambda \overline{b} + 1$ auszuzahlen ist. Eben so ist es in den übrigen Gliedern der Formel. Nach der angenommenen Bedingung sollen sie die erste Hebung nicht haben, und für die folgende bloß eine auf noch $n - 1$ Jahre aufgeschobene Leibrente. Der Tod des Mannes wird, wie gewöhnlich, auf den Anfang des Sterbejahrs gesetzt, an dessen Ende die Hebung erfolgt. Daher am Ende des Sterbejahrs Ein Jahr verflossen ist, und noch $n - 1$ mehr vergehen sollen, ehe die Pension fällig wird.

Nun ist aber $\frac{\overline{B}}{B r} \overline{-(n-1)} \lambda \overline{b} + 1 = \overline{-(n)} \lambda \overline{b}$, das ist, gleich einer auf $n - 1$ Jahr aufgeschobenen Leibrente für das Alter $b + 1$, mit $\frac{\overline{B}}{B r}$ multiplicirt, oder gleich

einer auf n Jahre aufgeschobenen Leibrente für das Alter b .

Denn $\frac{-n}{B} \lambda \overline{b} = \frac{\frac{n+1}{-B}}{B r^{n+1}} + \frac{\frac{x}{-B}}{B r^x}$, und

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{-B}}{B r} \cdot \frac{-(n-1)}{B} \lambda \overline{b+1} &= \frac{\frac{1}{-B}}{B r} \cdot \left(\frac{\frac{n+1}{-B}}{-B r^n} + \frac{\frac{x}{-B}}{-B r^{x-1}} \right) \\ &= \frac{1}{B} \cdot \left(\frac{\frac{n+1}{-B}}{r^{n+1}} + \frac{\frac{x}{-B}}{r^x} \right). \end{aligned}$$

Auf dieselbe Art werden auch die übrigen Theile in dem Werthe der *vollen* Wittwenrente verändert, und es kommen in dem obigen Ausdruck überall statt der vollen Leibrenten die auf n Jahre aufgeschobene **Lei**renten.

Also wird der gefuchte Werth

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\Delta A}{A} \frac{-n}{B} \lambda \overline{b} + \frac{\Delta^1 A}{A} \cdot \frac{\frac{1}{-B}}{B} \frac{-n}{r} \lambda \overline{b+1} \\ &+ \frac{\Delta^2 A}{A} \cdot \frac{\frac{2}{-B}}{B} \frac{-n}{r^2} \lambda \overline{b+2} + \frac{\Delta^x A}{A} \cdot \frac{\frac{x}{-B}}{B} \frac{-n}{r^x} \lambda \overline{b+x}. \end{aligned}$$

Setzet man in diesem Ausdruck überall die Werthe der aufgeschobenen Leibrenten (nach §. 83. der *Einleit.*) so wird

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{\frac{n}{-B}}{B} \frac{\lambda \overline{b+n}}{r^n} + \frac{\Delta^1 A}{A} \cdot \frac{\frac{1}{-B}}{B} \frac{\frac{n+1}{-B}}{-B} \frac{\lambda \overline{b+1+n}}{r^{1+n}} \\ &+ \frac{\Delta^2 A}{A} \cdot \frac{\frac{2}{-B}}{B} \cdot \frac{\frac{n+2}{-B}}{-B} \cdot \frac{\lambda \overline{b+2+n}}{r^{2+n}} + \frac{\Delta^x A}{A} \cdot \frac{\frac{x}{-B}}{B} \cdot \frac{\frac{n+x}{-B}}{-B} \cdot \frac{\lambda \overline{b+x+n}}{r^{n+x}}. \end{aligned}$$

Wenn

Wenn alle Glieder mit $\frac{\overset{n}{-}B}{\overset{n}{-}B}$ multiplicirt werden, so erhält man

$$Q = \frac{\overset{n}{-}B}{Br^n} \cdot \left(\frac{\Delta A}{A} \cdot \lambda \overline{b+n} + \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{A} \cdot \frac{\overset{n+1}{-}B}{\overset{n}{-}Br^1} \lambda \overline{b+1+n} \right. \\ \left. + \frac{\Delta \overset{2}{-}A}{A} \cdot \frac{\overset{n+2}{-}B}{\overset{n}{-}Br^2} \lambda \overline{b+2+n} + + \frac{\Delta \overset{x}{-}A}{A} \cdot \frac{\overset{n+x}{-}B}{\overset{n}{-}Br^x} \lambda \overline{b+x+n} \right)$$

$$\text{Aber } \frac{\Delta A}{A} \lambda \overline{b+n} + \frac{\Delta \overset{1}{-}A}{A} \cdot \frac{\overset{n+1}{-}B}{\overset{n}{-}Br} \lambda \overline{b+1+n} + +$$

ist der baare Werth einer Wittwenrente, wenn das Alter des Mannes a , der Frauen $b+n$ ist $= \lambda \overline{b+n} - \lambda a.(b+n)$ (§. 189. Einleit.).

$$\text{Folglich } Q = \frac{\overset{n}{-}B}{B.r^n} \cdot (\lambda \overline{b+n} - \lambda a.(b+n)).$$

Ex. Das Alter des Mannes sey 35, und der Frauen 30 Jahr, die Wittwenrente soll 10 Jahr nach dem erfolgten Tode des Mannes erst laufend werden, so ist der Werth für die Wittwenrente, wenn der Mann 35, die Frau 40 Jahre hat, oder $\lambda \overline{40} - \lambda_{35.40} = 2,7843$.

$$\text{Auch } \frac{\overset{n}{-}B}{B} \cdot \frac{1}{r^n} = \frac{374}{439} \cdot 0,67556, \text{ wenn nämlich } r = 1,04. \text{ Folglich}$$

$$Q = 2,7843 \cdot \frac{374}{439} \cdot 0,67556 = 1,5593.$$

Die *volle* Wittwenrente für dasselbe Alter der Eheleute ist 3,7594. *Jene ist weniger als der dritte Theil von dieser.*

Ex. Für dasselbe Alter der Eheleute soll die Wittwenrente *fünf* Jahr nach des Mannes Tode laufend werden; so ist $\lambda_{\overline{35}} - \lambda_{\overline{39.35}} = 3,2599$, und

$\frac{409}{439} \cdot 0,8219 \cdot 3,2599 = 2,4352$, das ist nahe $\frac{3}{4}$ tel der vollen Rente.

6.

Aufgabe. 4. Den Werth einer bedingt fälligen Wittwenrente zu finden, das ist einer solchen, die nur unter der Bedingung fällig wird, daß der Mann ein bestimmtes Alter erreiche, oder gewisse Jahre nach dem Ankauf der Rente noch lebe.

Auflösung.

1) Statt der Eherente für das gegebene Alter der Personen, nehme man eine andere für ein Paar, das so viel Jahre älter ist, als der Mann, um die Rente fällig zu machen, nach dem Ankauf der Rente noch leben soll.

2) Diese Wittwenrente werde zurück discountirt auf die gegebene Jahre, und dann vermindert in dem Verhältniß der Zahl der stehenden Ehen nach so viel Jahren zu der Zahl der anfänglichen Ehen, so hat man den gesuchten Werth

$$Q = \frac{{}^nA \cdot {}^nB}{A \cdot B \cdot r^n} \cdot (\lambda_{\overline{b+n}} - \lambda_{\overline{a+n. b+n}}).$$

Beweis.

Beweis. Nach den Bedingungen bekommen diejenigen Wittwen gar nichts, deren Männer nicht n Jahre nach dem Ankauf gelebet haben. Folglich empfangen auch von allen nach dem n ten Jahre aus einer anfänglichen Zahl gleicher Ehen entstandenen Wittwen nur diejenigen die Pension, deren Männer nach dem n ten Jahre gestorben sind.

Die vorhandenen Wittwen im $n+1$ ten Jahre sind

$$\frac{A - \frac{n+1}{A}A}{A} \cdot \frac{\frac{n+1}{B}B}{B}, \text{ und der jetzige Werth ihrer als}$$

$$\text{denn fälligen Hebung ist } \frac{(A - \frac{n+1}{A}A)}{A} \cdot \frac{\frac{n+1}{B}B}{B \cdot r^{n+1}}.$$

$$\text{Für das folgende Jahr ist solcher} = \frac{(A - \frac{n+2}{A}A)}{A} \cdot \frac{\frac{n+2}{B}B}{B \cdot r^{n+2}},$$

und für das unbestimmte Jahr $n+x$,

$$= \frac{(A - \frac{n+x}{A}A) \cdot \frac{n+x}{B}B}{A \cdot B \cdot r^{n+x}}.$$

Das Verhältniß der hebungsfähigen Wittwen zu der

Zahl aller, ist $\frac{n}{A} - \frac{n+1}{A}A : A - \frac{n+1}{A}A$ im $n+1$ ten Jahr,

in $n+2$ ten $\frac{n}{A} - \frac{n+2}{A}A : A - \frac{n+2}{A}A$, und im $n+x$ ten,

$$\frac{n}{A} - \frac{n+x}{A}A : A - \frac{n+x}{A}A.$$

Daher sind die Werthe der wirklich zahlbaren He-

$$\text{bungen } \frac{(\frac{n}{A} - \frac{n+1}{A}A) \cdot \frac{n+1}{B}B}{A \cdot B \cdot r^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(\frac{n}{A} - \frac{n+2}{A}\right) \cdot \frac{n+2}{B}}{A \cdot B \cdot r^{n+2}} + + \frac{\left(\frac{n}{A} - \frac{n+x}{A}\right) \cdot \frac{n+x}{B}}{A \cdot B \cdot r^{n+x}} \\
& = \frac{\frac{n}{A}}{A} \cdot \left(\frac{\frac{n+1}{B}}{B \cdot r^{n+1}} + \frac{\frac{n+2}{B}}{B \cdot r^{n+2}} + + \frac{\frac{n+x}{B}}{B \cdot r^{n+x}} \right) - \\
& \left(\frac{\frac{n+1}{A} \cdot \frac{n+1}{B}}{A \cdot B \cdot r^{n+1}} + \frac{\frac{n+2}{A} \cdot \frac{n+2}{B}}{A \cdot B \cdot r^{n+2}} + + \frac{\frac{n+x}{A} \cdot \frac{n+x}{B}}{A \cdot B \cdot r^{n+x}} \right).
\end{aligned}$$

Der erste Theil ist $\frac{\frac{n}{A}}{A} \cdot \frac{\frac{n}{B}}{B r^n} \cdot \lambda \overline{b+n}$;

der zweyte $= \frac{\frac{n}{A} \cdot \frac{n}{B}}{A \cdot B \cdot r^n} \lambda \overline{(a+n) \cdot (b+n)}$.

Denn $\frac{\frac{n+1}{B}}{B \cdot r^{n+1}} + \frac{\frac{n+2}{B}}{B \cdot r^{n+2}} + +$ ist eine n Jahre auf-

geschobene Leibrente für das Alter b , $= \frac{\frac{n}{B}}{B \cdot r^n} \lambda \overline{b+n}$,

und $\frac{\frac{n+1}{A} \cdot \frac{n+1}{B}}{A \cdot B \cdot r^{n+1}} + \frac{\frac{n+2}{A} \cdot \frac{n+2}{B}}{A \cdot B \cdot r^{n+2}} + +$ ist eine n Jahre aufgeschobene Verbindungsrente,

$$= \frac{\frac{n}{A} \cdot \frac{n}{B}}{A \cdot B \cdot r^n} \cdot \lambda \overline{(a+n) \cdot (b+n)}. \text{ (Einl. §. 83. und 143.)}$$

Also ist der gesuchte Werth

$$= \frac{\frac{n}{A} \cdot \frac{n}{B}}{A \cdot B r^n} (\lambda \overline{b+n} - \lambda \overline{(a+n) \cdot (b+n)}).$$

7.

Zusatz. Man kann auch so verfahren. Es wird eine n Jahre aufgeschobene Leibrente für die Frau gesucht,

gesucht, und eine dergleichen *Eherente*. Die erste wird in dem Verhältniß $\frac{{}^nA}{A}$ vermindert, und dann von ihr die letztere abgezogen, so ist der Rest der gesuchte Werth.

Weil auch $\frac{{}^nB}{Br^n} \lambda \overline{b+n} - \frac{{}^nA \cdot {}^nB}{A \cdot B \cdot r^n} \lambda \overline{(a+n)(b+n)}$ eine auf n Jahre aufgeschobene *Eherente* ist, nach *Aufg. 1.*

§. 3. so ziehe man davon ab $\frac{(A - {}^nA)}{A} \cdot \frac{{}^nB}{Br^n} \lambda \overline{b+n}$

oder die aufgeschobene Leibrente für b , durch $\frac{A - {}^nA}{A}$

multiplicirt, so erhält man

$\frac{{}^nA \cdot {}^nB}{A \cdot B \cdot r^n} (\lambda \overline{b+n} - \lambda \overline{(a+n)(b+n)})$, oder den hier gesuchten Werth. Also von der auf n Jahre nach dem Ankauf aufgeschobenen Wittwenrente, die auf n Jahre aufgeschobene Leibrente in die Wahrscheinlichkeit, daß der Mann in n Jahren gestorben sey, multiplicirt, abgezogen, giebt den gesuchten Werth.

8.

Der Satz kann auch auf diese Art bewiesen werden. Daß die Hebung für ein unbestimmtes auf das n te folgende Jahr wirklich werde fällig werden, hängt ab, 1) davon, daß die Frau noch lebe; 2) daß der Mann nach dem Einkauf noch n Jahre lebe, und 3) daß der letztere

letztere aus denen im n ten Jahr Lebenden abgegangen sey.

Die erste Wahrscheinlichkeit ist $\frac{\overset{n+x}{B}}{B}$, die zweyte $\frac{\overset{n}{A}}{A}$,

die dritte $\frac{\overset{n}{A} - \frac{\overset{n+x}{A}}{A}}{\overset{n}{A}}$. Daraus wird die zusammenge-

fetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{\overset{n}{A}}{A} \cdot \frac{(\overset{n}{A} - \frac{\overset{n+x}{A}}{A})}{\overset{n}{A}} \cdot \frac{\overset{n+x}{B}}{B}$

$= \frac{(\overset{n}{A} - \frac{\overset{n+x}{A}}{A})}{A} \cdot \frac{\overset{n+x}{B}}{B}$. Dieser letzte Ausdruck

enthält die *zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit*, dass die Frau noch lebe, der Mann aber nach dem n ten Jahr gestorben sey.

Man würde unrecht schliessen, wenn man diese Wahrscheinlichkeit der Hebung auf das Jahr $n+x$ aus-

drucken wollte durch $\frac{\overset{n}{A}}{A} \cdot \frac{(A - \frac{\overset{n+x}{A}}{A})}{A} \cdot \frac{\overset{n+x}{B}}{B}$.

Es kann doch so richtig scheinen. Die wirkliche Zahlung wird erfolgen, wenn 1) die Frau lebet, davon ist

die Wahrscheinlichkeit $\frac{\overset{n+x}{B}}{B}$, und 2) wenn der Mann

tot ist, davon ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{A - \frac{\overset{n+x}{A}}{A}}{A}$,

3) wenn der Mann noch n Jahre nach dem Ankauf lebet,

davon ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{\overset{n}{A}}{A}$. Also müsse

die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit seyn

$\frac{\overset{n}{A}}{A} \cdot \frac{(A - \frac{\overset{n+x}{A}}{A})}{A} \cdot \frac{\overset{n+x}{B}}{B}$. Allein dies würde ein

Verstoß

Verstoß seyn gegen die richtige Art Wahrscheinlichkeiten zusammenzusetzen. (Siehe *Einleit.* Cap. IV. §. 172.)

Es muß vielmehr so geschlossen werden. Gesetzt es sey die Wahrscheinlichkeit, daß der Mann noch n Jahre

leben werde, das ist $\frac{n}{A}$ Gewissheit, so ist die Wahr-

scheinlichkeit, daß er todt sey, gewiß nicht $\frac{A - \frac{n+x}{A}A}{A}$,

sondern $\frac{\frac{n}{A} - \frac{n+x}{A}A}{\frac{n}{A}}$, nämlich die Wahrscheinlichkeit,

daß A aus denen, die nach n Jahren noch leben, näm-

lich aus $\frac{n}{A}$, gestorben sey. Folglich muß mit $\frac{n}{A}$,

auch $\frac{\frac{n}{A} - \frac{n+x}{A}A}{\frac{n}{A}}$ zusammengesetzt werden. Noch

dies. Wenn die Wahrscheinlichkeit, daß der Mann

todt sey $\frac{A - \frac{n+x}{A}A}{A}$, Gewissheit ist, so ist die zwote

Wahrscheinlichkeit, daß er n Jahre gelebet habe, gewiß

nicht $\frac{n}{A}$, sondern $\frac{\frac{n}{A} - \frac{n+x}{A}A}{A - \frac{n+x}{A}A}$. Folglich müßte

$\frac{A - \frac{n+x}{A}A}{A}$ mit $\frac{\frac{n}{A} - \frac{n+x}{A}A}{A - \frac{n+x}{A}A}$ zusammengesetzt werden.

Das giebt denn wiederum denselbigen Ausdruck. Ich habe in dem obigen Beweise gesucht die Sache von ihrer einleuchtendsten Seite vorzustellen.

9.

Exempel 1. Es sey das Alter des Mannes 35, und der Frau 30 Jahr. Die Zeit, die der Mann nach dem Ankauf der Rente noch leben soll, oder n , 5 Jahr, so ist der Werth der Wittwenrente für ein Ehepaar von 40, und 35 Jahren, 4 Procent gerechnet, 3,7453. Diese multiplicirt durch $\frac{374}{409}$, das ist, mit dem Verhältniß der Zahl der Lebenden vom Alter 40, zu denen vom Alter 35; und dann nochmals durch $\frac{{}_{35}B}{{}_{30}B r^5}$, oder durch das Verhältniß der discountirten Zahlen der Lebenden im Jahr 35, zu denen im Jahr 30, das ist durch $\frac{103,65}{135,35}$ (aus der *Tabelle* in §. 36. der *Einleitung*) multiplicirt, giebt $\frac{374}{409} \cdot \frac{103,65}{135,35} \cdot 3,7453 = 2,6225$.

Die volle Wittwenrente für das angenommene Ehepaar ist 3,7594. Der Unterschied also 1,1369, welches ein erheblicher Unterschied ist.

Ex. 2. Dasselbige Ehepaar genommen, und die Zeit, die der Mann noch leben soll, auf 10 Jahre gesetzt, so ist der gefuchte Werth

$$= \frac{{}_{45}A}{{}_{35}A} \cdot \frac{{}_{40}B}{{}_{30}B r^{10}} (\lambda_{40} - \lambda_{40.45}) = 1,8147.$$

Ex.

Ex. 3. Dasselbe Ehepaar beybehalten, aber die Zeit, die der Mann noch leben soll, sey 15 Jahr, so ist der gefuchte Werth

$$= \frac{{}^{50}_A \cdot {}^{45}_B}{{}^{35}_A \cdot {}^{30}_B \cdot r^{15}} \cdot (\lambda_{45} - \lambda_{50.45})$$

$$= \frac{300}{409} \cdot \frac{58,04}{135,35} \cdot 3,7933 = 1,1931.$$

Ex. 4. Es soll $\frac{1}{3}$ tel der Pension fällig werden, wenn der Mann 5 Jahre nach dem Einsatz gelebet hat; noch $\frac{1}{3}$ tel mehr, wenn es 10 Jahre, und die ganze Pension, wenn es 15 Jahre sind, so ist der baare Werth, das Alter, wie vorher, genommen

$$\frac{2,6225 + 1,8147 + 1,1931}{3} = 1,8734.$$

IO.

Anmerkung. Vergleicht man die Werthe der letzten, an gewisse Lebensjahre des Mannes gebundenen Renten, die, ob sie überall fällig werden oder nicht, von dem Leben des Mannes auf gewisse Jahre abhängen, mit den Werthen der *aufgeschobenen Wittwenrenten* in §.8. Aufg. 3, welche fällig werden, wenn der Mann stirbt vor der Frau, nur erst so viele Jahre nach dem Tode des Mannes, so findet man die letzten kleiner. In den meisten Fällen wird ein Ehemann also mehr Grund haben, die letztern zu kaufen, als die erstern. Die Wittwe genießet zwar alsdenn die nächsten *n* Jahre nach des Mannes Tode die

Hebung

Hebung nicht. Bis dahin kann sie die meisten male, des Nachlasses des Mannes wegen, sie noch entbehren; aber nachher genießt sie solche sicher auf die übrige Lebenszeit. Bey den andern hingegen genießt sie solche zwar gleich nach des Mannes Tode, aber sie muß vorher das Risiko tragen, ob sie überall zur Hebung komme?

Es läßt sich die Bedingung machen, daß wenn der Mann im ersten Jahr nach dem Einsatz stirbt, die jährliche Pension nur sey

—	—	$\frac{1}{10}$ tel,
Stirbt er im zweyten	—	$\frac{2}{10}$ tel,
— — dritten	—	$\frac{3}{10}$ tel,

und so weiter, daß er durch jedes Jahr für die Wittwe $\frac{1}{10}$ tel mehr gewinnt, bis nach 9 vollendeten Jahren die Pension ganz fällig wird. Dieß sind *bedingt fällige steigende Wittwenrenten*. Allein weil die Wahrscheinlichkeit, daß der Mann in den nächsten Jahren sterben werde, nur gering ist, so wird der Unterschied in den Werthen der Renten so erheblich auch nicht, daß man nicht lieber diese Differenz für die volle Sicherheit noch zugeben werde.

II.

Anmerkung. Bey der Auflösung dieser Aufgaben kommen die *aufgeschobenen Leibrenten* sehr häufig vor. Wie solche jedesmal durch eine Division, aus einer vorher einzurichtenden Hülftabelle, wie die §. 56. der *Einleit.* Cap. 2. von Leibrenten ist, zu finden sind, ist §. 85. der *Einleit.* gezeiget.

Auf

Auf eine ähnliche Art kann man sich eine Hülftafel für aufgeschobene Verbindungs- oder Eherenten machen. Sie braucht folgende Columnen:

I.	II.	III.	IV.
Alter der Frau und des Mannes.	Producte aus den Zahlen der Lebenden im Alter des Mannes, multiplicirt mit den discountirten Zahlen der Lebenden im Alter der Frau.	Werthe der zugehörigen Eherenten.	Producte der Zahlen der Columnen II. und III. in einander.

Ist so eine Tabelle eingerichtet, so nehme man aus der vierten Columnne das Product, was zu der Verbindungsrente zweier Personen gehöret von einem Alter, welches ihr gegebenes um die Jahre des Aufschubs übertrifft; und dieß dividire man durch das Product aus der zwoten Columnne, welches zu dem gegebenen Alter der Personen selbst gehört. So viel als man Eherenten in den Fällen hat, so viel bekommt man alsdenn auch Werthe aufgeschobener Eherenten, mittelst Einer Division.

Das Verfahren erhellet hieraus. Es ist die n Jahre auf-

$$\text{aufgeschobene Verbindungsrente} = \frac{{}^nA \cdot {}^nB}{A \cdot B \cdot r^n} \cdot \lambda(a+n)(b+n)$$

$$= \frac{{}^nA}{A} \cdot \frac{{}^nB : r^{b+n}}{B : r^b} \cdot \lambda(a+n)(b+n). \text{ Die Columnne}$$

II. enthält die Producte $\frac{{}^nA}{A} \cdot \frac{{}^nB : r^{b+n}}{B : r^b}$, bey dem Jahr

II. Theil.

S

$a+n$

$a+n$ mit $b+n$, und auch die Producte $A \cdot B : r^b$ für das Alter a und b , und die Columnne IV. die Producte aus den ersten Producten, $\frac{n}{-}A \cdot \frac{n}{-}B : r^{b+n}$, in die Werthe der Verbindungsrenten $\lambda \frac{(a+n)(b+n)}{}$.

I2.

Aufgabe 5. Den Werth der Wittwenrente zu finden, die nur fällig wird unter der Bedingung, daß der Mann ein gewisses Alter erreiche, und wenn sie fällig wird, erst nach einer gegebenen Zahl von Jahren nach dem Einsatz fällig wird.

Auflösung. Es sey das Alter des Mannes bey dem Einsatz a , und das welches er erreichen soll, um die Rente fällig zu machen, $a+m$. Das Alter der Frau bey dem Einsatz b . Ferner die Zeit, welche nach dem Einsatz verfloßen seyn muß, ehe die Hebung erfolgt, n . Die Zahl n muß größer seyn als m .

1) Man suche eine auf n Jahre nach dem Ankauf aufgeschobene Wittwenrente (nach §. 3. *Aufg.* 2.)

2) Die auf eben so viele Jahre aufgeschobene *Leibrente* der Frau, vermindert in dem Verhältniß der nach m Jahren gestorbenen zu der anfänglichen Zahl der Lebenden, das ist, mit $\frac{A - \frac{m}{-}A}{A}$ sie multiplicirt, ziehe man von der gefundenen Wittwenrente ab, so ist der Rest, das Gesuchte.

Beweis.

Beweis. Die erste Zahlung der Rente geschieht im $n+1$ ten Jahr, folglich sind die Werthe der Zahlungen

an alle Wittwen $\frac{(A - \frac{n+1}{r}A)}{A} \cdot \frac{\frac{n+1}{r}B}{B \cdot r^{n+1}} \cdot + +$.

Allein weil nun in jedem Termin nur diejenigen Wittwen etwas erhalten, deren Männer m Jahre nach dem Einsatz gelebet haben, so sind die Werthe der wirklich zu zahlenden Pensionen

$$= \frac{\frac{m}{r}A - \frac{n+1}{r}A}{(A - \frac{n+1}{r}A)} \cdot \frac{(A - \frac{n+1}{r}A)}{A} \cdot \frac{\frac{n+1}{r}B}{B \cdot r^{n+1}} + +$$

$$= \frac{(\frac{m}{r}A - \frac{n+1}{r}A)}{A} \cdot \frac{\frac{n+1}{r}B}{B \cdot r^{n+1}} \cdot + +$$

$$= \frac{\frac{m}{r}A}{A} \cdot \frac{\frac{n+1}{r}B}{B \cdot r^{n+1}} - \frac{\frac{n+1}{r}A}{A} \cdot \frac{\frac{n+1}{r}B}{B \cdot r^{n+1}} + +$$

$$= \frac{\frac{n+1}{r}B}{B \cdot r^{n+1}} - \frac{\frac{n+1}{r}A \cdot \frac{n+1}{r}B}{A \cdot B \cdot r^{n+1}} - \frac{(A - \frac{m}{r}A)}{A} \cdot \frac{\frac{n+1}{r}B}{B \cdot r^{n+1}}$$

$$= \frac{\frac{n}{r}}{\lambda b} - \frac{\frac{n}{r}}{\lambda a b} - \frac{(A - \frac{m}{r}A)}{A} \cdot \frac{\frac{n}{r}}{\lambda b}.$$

Ex. Es sey wiederum das Alter des Mannes 35, der Frau 30 Jahr, und $n = 5$ Jahr, so ist die *aufgeschobene Eherente* $= 2,5847$. Die *aufgeschobene Leibrente der Frau* 5,1504. §. 3.

$$\text{Nun ist } \frac{A - \frac{m}{r}A}{A} = 1 - \frac{374}{409} = \frac{35}{409} =$$

0,0856, und 5,1504. 0,0856 $=$ 0,4409. Also 2,5657 $-$ 0,4409 $=$ 2,1248. Der Unterschied dieser

Rente von der bloß aufgeschobenen Wittwenrente ist nur geringe.

Ex. 2. Es sey $m = 10$ Jahre, das übrige wie vorher, so ist das von der aufgeschobenen Wittwenrente abzuziehende Stück $\frac{70}{409} \cdot 5,1504 = 0,8815$. Daher der gefuchte Werth, $2,5657 - 0,8815 = 1,6842$.

Ex. 3. Ist auch $m = 15$ Jahre, so ist

$$\frac{A - \frac{m}{A} A}{A} = \frac{109}{409}, \text{ und } \frac{109}{409} \cdot 5,1504 = 1,3726,$$

und $2,5657 - 1,3726 = 1,1931$, wie im §. 9. nach der 4ten Aufgabe. Denn in diesem Fall, wo der Mann 15 Jahre leben soll, um die Rente fällig zu machen, versteht sich von selbst, daß sie nicht eher als 15 Jahre nach dem Einsatz fällig wird, und die zwote Bedingung ist ein vergeblicher Zusatz.

13.

Aufgabe 6. Den Werth einer bedingt fälligen und aufgeschobenen Wittwenrente zu finden, das ist, einer solchen, die nur fällig wird unter der Bedingung, daß der Mann nach dem Ankauf noch gewisse Jahre (m) lebe, und dann nur fällig wird, gewisse Jahre (n) nach des Mannes Tode.

Auflösung.

1) Man suche nach *Aufgabe 3.* §. 5. den Werth der Wittwenrente, die erst n Jahre nach des Mannes Tode

Tode fällig wird für ein Ehepaar, welches m Jahre älter ist als das gegebene.

2) Diesen gefundenen Werth multiplicire man durch $\frac{^m A \cdot ^m B}{A \cdot B \cdot r^m}$, so hat man das gesuchte, oder in einer Formel es ausgedruckt

$$Q = \frac{^m A}{A} \cdot \frac{^m B}{B r^m} \cdot \frac{^{n+m} B}{^m B r^n} (\lambda \overline{b+m+n} - \lambda (a+m)(b+m+n))$$

$$= \frac{^m A}{A} \cdot \frac{^{n+m} B}{B r^{n+m}} \cdot (\lambda \overline{b+m+n} - \lambda (a+m)(b+m+n)).$$

Beweis. Weil die Wittwenrente erst n Jahre fällig wird nach des Mannes Tode, zu welcher Zeit dieser auch erfolge, so ist ihr Werth, wenn die zwote Bedingung

$$\text{nicht hinzukommt,} = \frac{^n B}{B \cdot r^n} \cdot \left(\frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{^n B}{^n B} \cdot \lambda \overline{b+n} + \right.$$

$$\left. \frac{\Delta ^1 A}{A} \cdot \frac{^{n+1} B}{^n B} \cdot \frac{\lambda \overline{b+n+1}}{r} + + \right.$$

$$\left. \frac{\Delta ^m A}{A} \cdot \frac{^{n+m} B}{^n B} \cdot \left(\frac{\lambda \overline{b+n+m}}{r^m} \cdot ++ \right) \right) \S. 5.$$

In diesem Ausdruck enthält jedes Glied ein Product der in dem Jahr (im Anfang nämlich) entstandenen Wittwen in den baaren Werth ihrer Rente, Weil nun aber der Mann m Jahre muß gelebet haben, falls die Wittwe zur Pension kommen soll, so empfangen die in den

ersten m Jahren entstehenden Wittwen nichts. Wenn der Mann aber m Jahre gelebt hat, und im Anfang des $m+1$ ten abgeht, so kommen die alsdenn entstehenden Wittwen zur Hebung, empfangen aber nur aufgeschobene Wittwenrenten. Daher wird der hier gesuchte Werth

$$\begin{aligned}
 &= \frac{B}{Br^n} \cdot \left(\frac{\Delta^m A}{A} \cdot \frac{B}{B r^m} \lambda \overline{b+n+m} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta^{m+1} A}{A} \cdot \frac{B}{B r^{m+1}} \lambda \overline{b+n+m+1} + + \right) \\
 &= \frac{A}{A} \cdot \frac{B}{B r^{m+n}} \cdot \left(\frac{\Delta^m A}{A} \cdot \frac{B}{B} \lambda \overline{b+n+m} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta^{m+1} A}{A} \cdot \frac{B}{B r} \lambda \overline{b+n+m+1} + + \right) \dots
 \end{aligned}$$

Der letzte Factor ist der Werth einer Wittwenrente für ein Ehepaar, davon der Mann $a+m$, die Frau $b+n+m$ alt ist, (nach §. 189. *Einleitung*) $= \lambda \overline{b+n+m} - \lambda \overline{a+m. b+n+m}$, und

$$\frac{B}{B r^n} (\lambda \overline{b+n+m} - \lambda \overline{a+m. b+n+m})$$

ist der Werth der n Jahre nach des Mannes Tode fälligen Wittwenrente für ein Paar, wo der Mann $a+m$ und die Frau $b+m$ Jahr alt ist, §. 5. Dieser Werth multiplicirt durch

durch $\frac{{}^m A}{A} \cdot \frac{{}^m B}{B r^m}$ giebt das gesuchte

$$\frac{{}^m A}{A} \cdot \frac{{}^{n+m} B}{B \cdot r^{m+n}} (\lambda \overline{b+n+m} - \lambda \overline{a+m} \cdot \overline{b+m+n}).$$

I4.

Zusatz. 1) Wenn $m=0$ ist, so ist ${}^m A = A$ und ${}^{n+m} B = {}^n B$. Also dieser Werth dem gleich in §. 5.

2) Wenn $n=0$, so ist ${}^{n+m} B = {}^m B$, und der gesuchte Werth $\frac{{}^m A}{A} \cdot \frac{{}^m B}{B r^m} (\lambda \overline{b+m} - \lambda \overline{a+m} \cdot \overline{b+m})$, das ist der Werth, der gleich nach des Mannes Tode fällig ist, unter der Bedingung, daß dieser m Jahre gelebet habe, (nach Aufgabe 5. §. 12.).

15.

Ex. 1. Wenn das Alter des Mannes 35, der Frau 30 ist, und die Rente soll jedesmal erst 5 Jahre nach des Mannes Tode fällig seyn, so ist der Werth derselben 2,4352. (§. 5.). Kommt nun die Bedingung hinzu, daß der Mann 5 Jahre nach dem Einkauf leben muß, wenn sie überall fällig werden soll, so ist ihr Werth

$$= \frac{374}{409} \cdot \frac{409}{439} \cdot \frac{1}{r^5} \cdot 2,4352.$$

$$= \frac{374}{439} \cdot 0,8219 \cdot 2,4352 = 1,7051.$$

Soll bey denselben Bedingungen die Rente 10 Jahr nach des Mannes Tode erst zahlbar werden, so ist ihr

$$\text{Werth} = \frac{374}{439} \cdot 0,8219 \cdot 1,5593 \cdot (\S. 5.) = 1,0918.$$

16.

Anmerkung 1. Die bisherigen Aufgaben enthalten die vornehmsten Umstände, auf die bey *allgemeinen Versorgungsanstalten* Rücksicht genommen werden muß. Man sieht, daß *aufgeschobene Wittwenrenten*, die erst einige Jahre nach des Versorgers Tode fällig werden, wohlfeiler seyn können, und in den berechneten Beyspielen es wirklich sind, als die *bedingt fälligen*, die von dem Leben des Mannes auf so viele Jahre abhängen. Bedarf die Wittwe in den ersten 10 Jahren nach des Mannes Tode noch keiner Versorgung, so kostet die 10 Jahr nachher fällige Rente für sie, bey dem Alter in den obigen Exempeln, nur etwas mehr als anderthalbmal die jährliche Hebung; kann die Wittwe nur fünf Jahre warten, und darf der Mann es auf seine Gesundheit wagen, die Rente an die Bedingung zu binden, daß er selbst noch 5 Jahre lebe, so ist der Werth nur 1,7 der jährlichen Hebung. Sie wird gar nur 1,09 wenn die Wittwe 10 Jahre warten und der Mann 5 Jahre selbst noch leben soll.

Und daß in den meisten Fällen, wenn nicht in allen, es so seyn werde, daß nämlich die *n Jahre nach dem*
Tode

Tode des Mannes aufgeschobene Rente wohlfeiler sey, als die, welche n Lebensjahre des Mannes erfordert, um fällig zu werden, läßt sich aus den allgemeinen Ausdrücken von beyden übersehen, wenn man die Tabelle XXVII. von den Wittwenrenten damit zusammenhält. Die erste,

die aufgeschobene ist, $\frac{{}^nB}{B r^n} (\lambda \overline{b+n} - \lambda a \overline{(b+n)})$. §. 5.

$= \frac{{}^nB}{B r^n} \cdot E. a \overline{(b+n)}$, wo $E. a \overline{(b+n)}$ die Gröſſe des baaren Einſatzes für eine volle Wittwenrente ist, wenn das Alter des Mannes a , und der Frauen ihres $b+n$ ist. Die zwote, die bedingt fällige, ist

$\frac{{}^nA}{A} \cdot \frac{{}^nB}{B r^n} (\lambda \overline{b+n} - \lambda a \overline{+n} \cdot \overline{b+n})$. §. 6.

$= \frac{{}^nA}{A} \cdot \frac{{}^nB}{B r^n} \cdot E(a \overline{+n}) \cdot \overline{(b+n)}$.

Nun nehmen die Einſätze, oder die baaren Werthe der Wittwenrenten, wenn das Alter des Ehemanns daſſelbe bleibt, der Frauen ihres aber größer wird, das ist, die Werthe $\lambda \overline{b+n} - \lambda a \cdot \overline{b+n}$ in ſtärkern Verhältniſſe ab,

als $\frac{{}^nA}{A}$, wogegen die Einſätze, wenn beyde Eheleute gleich viel älter ſind, das ist $\lambda \overline{b+n} - \lambda a \overline{+n} \cdot \overline{b+n}$, anfangs zunehmen, hernach erſt wieder abnehmen. Daher die meiſtenmale der Einſatz für den erſten Fall kleiner ſeyn muß als in dem letzten.

17.

Bey diesen Renten-Werthen kommt aber die Abweichung der Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften in Betracht. Nimmt man einmal an, was anzunehmen die Erfahrungen bey der Calenbergischen Gesellschaft berechtigen, (Abh. von der Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften §. 67.) daß die nach den Tabellen berechneten vollen Wittwenrenten als richtig bey Wittwencaf-
fen beybehalten werden können, weil der Vortheil aus der mindern Sterblichkeit der Männer, und der Nachtheil aus der noch geringern Sterblichkeit der Frauen sich ein-
ander nahe aufheben, so sind die Werthe der aufgeschobenen, und auch der bedingt fälligen Wittwenrenten nach den gemeinen Tabellen berechnet, zu klein. Laß die n Jahre aufgeschobene oder nach des Mannes Tode

erst fällige Rente §. 5. $\frac{{}^nB}{Br^n} \cdot E(a. \overline{b+n})$ für die ausgesuchte Gesellschaft bezeichnet werden durch

$\frac{{}^nB'}{Br^n} \cdot E'a. \overline{b+n}$. Wird nun angenommen $E. a. \overline{b+n}$

$= E'a. \overline{b+n}$, so ist (nach §. 51. der angeführten Ab-

handlung) $\frac{{}^nB'}{Br^n} - \frac{{}^nB}{Br^n} = v \frac{{}^nB}{Br^n} \left(1 - \frac{{}^nB}{B} \right)$ wenn v

die Gröfse ist, die von dem Unterschied der Sterblichkeit abhängt, und positiv, wo die Sterblichkeit geringer ist als die tabellarische. Daraus entsteht ein Unterschied

$v \frac{{}^nB}{B} \left(1 - \frac{{}^nB}{B} \right) \cdot \frac{E(a. \overline{b+n})}{Br^n}$ in den Werthen

dieser

dieser Renten nach der *wirklichen Sterblichkeit* und *nach den Tabellen*, der hier immer *positiv* ist. Die *Casse* wird also zu kurz kommen, wenn hierauf keine Rücksicht genommen wird.

Rey den *bedingt fälligen* Renten, die von gewissen Lebensjahren des Mannes abhängen, $\frac{{}^nA \cdot {}^nB}{A \cdot B \cdot r^n} \cdot E(\overline{b+n} \cdot \overline{a+n})$ ist der Werth abhängig von beyden Verhältnissen $\frac{{}^nA}{A}$ und $\frac{{}^nB}{B}$. Hier ist also der Unterschied noch gröfser.

Indessen wenn die Zahl der Jahre n nicht grofs ist und also $1 - \frac{{}^nB}{B}$ ein kleiner Bruch, so wird, weil $v = 0,4$, (§. 47. *angef. Abh.*) der Unterschied bey der ersten Art von Renten $0,4 \cdot \frac{{}^nB}{B} \left(1 - \frac{{}^nB}{B}\right) \cdot \frac{Ea \cdot (\overline{b+n})}{r^n}$ nicht sehr erheblich seyn.

18.

Das *Risico* der *Casse* ist bey der ersten Art von Renten, die n Jahre nach des Mannes Tode fällig werden auch kleiner, als bey denen, die an die Bedingung, dafs der Mann noch n Jahre lebe, gebunden sind. Der zu erwartende Verlust nämlich nach seinem *Maximo* berechnet. Denn sonst ist der an sich mögliche Verlust gröfser bey der ersten Classe. Diefs erhellet aus §. 23. der *Abhandl. über das Risico*.

Soll

Soll nämlich die Rente erst n Jahre nach des Mannes Tode fällig werden, so ist die größte mögliche Ausgabe, welche die Casse haben kann, eine Zeitrente auf das Alter einer Person, welche n Jahre älter ist, als die Frau, auf n Jahre zurück discountirt. Von dieser discountirten Zeitrente den Einsatz abgezogen, giebt den größten möglichen Verlust. Weil nun auch der ganze Einsatz gewonnen werden kann, so ist jene Zeitrente die Summe des Gewinns und des Verlustes.

Eine gleiche Zeitrente ist auch die Summe des *möglichen Verlustes* und des *möglichen Gewinns* bey der an n Lebensjahre des Mannes gebundenen Rente.

Der an sich *mögliche Verlust* der Casse ist bey den ersten *aufgeschobenen Wittwenrenten* größer, und der an sich *mögliche Gewinn* kleiner, als bey den bedingt fälligen der zwoten Art. Daher die Differenz des größten möglichen Verlustes und Gewinns bey jenen auch größer ist, als bey diesen. Dadurch wird das größte zu erwartende Risiko vermindert. (angef. Stelle).

Es empfehlen sich also auch von dieser Seite die *aufgeschobenen vor den bedingt fälligen*. Jene müssen also bey einer Verforgungsanstalt nicht fehlen, die allgemein seyn soll. Wählt man eine aus aufgeschobenen und bedingt fälligen zusammengesetzte Art, wie die in der 6ten Aufgabe §. 13., so hat man die wohlfeilsten an sich, und zugleich solche, wobey man den Nachtheilen entgeht,
die

die aus dem Einschleichen ungesunder Ehemänner für die Gesellschaft entspringen. Denn dieß ist ein Vorzug derer, die nur unter der Bedingung fällig werden, daß der Mann nach dem Einsatz noch einige Jahre leben soll, und dieß empfiehlt sie recht sehr. Um die Ungewissheit, die dabey Statt findet, nicht weiter als nöthig ist, zu verlängern, darf man nur etwan zwey oder drey, höchstens vier als Probejahre bedingen, die der Mann noch leben soll. Und auf die Abweichung der Sterblichkeit in ausgesuchten Gesellschaften kann leicht in den Tabellen die erforderliche Rücksicht genommen werden.



Z u s a t z

zur dritten und vierten Abhandlung.

Von der Wahrscheinlichkeit der grössten Erwartung.

I.

*Anmerkung über die Wahrscheinlichkeit des berechneten
Risico der Casse.*

Das in der dritten Abhandlung berechnete grösste Risico der Casse ist nicht der grösste mögliche Verlust oder Gewinn, sondern ein grösster Mittel- oder Durchschnitts-Verlust, die grösste *Erwartung*. Daher ist es auch nicht *gewiss*, sondern nur *wahrscheinlich*, daß der *wirkliche* Erfolg nicht noch mehr Verlust oder Gewinn bringen werde, als dieß Risico beträgt, das ist, als sich, alles aufs grösste berechnet, *erwarten* läßt. Die Frage, wie groß diese letztere Wahrscheinlichkeit sey, ist hier also auch erheblich.

Da die Coëfficienten eines Binomii $(a+b)^m$, oder die Theile des Binomii $(1+1)^m$, die Zahl der Fälle ausdrücken, in denen die Casse für alle m Renten, zu zahlen bekommt 1, 2, 3 u. s. f., wo der Werth der Einheit so groß ist, als die Summe *des grössten möglichen Gewinns und Verlustes bey einer einzelnen Rente*, die in dem Vorhergehenden durch die Linie AB (Fig. 2.) vorgestellt

gestellt ist; so druckt das Verhältniß eines einzelnen Coëfficienten zu der Zahl aller überhaupt möglichen Fälle, 2^m , die Wahrscheinlichkeit aus, daß der *wirkliche Werth* der m Renten gerade ein solcher seyn werde, als der Exponent der Potenz von b in dem angenommenen Coëfficienten des Binomii $(a+b)^m$ angiebt. Z. B. $\frac{1}{2^m}$ ist die Wahrscheinlichkeit daß *gar nichts* zu zahlen sey, oder der größte an sich mögliche Gewinn Statt finde. Eben so groß ist die *Wahrscheinlichkeit für den größten möglichen Verlust*, oder daß die Casse m . A B für m Renten zu zahlen haben werde.

Der *Durchschnitts-Coëfficient*, das ist der *mittlere*, wo der größte mögliche Gewinn und der größte mögliche Verlust bey den einzelnen Renten als gleich groß und also beyde auch als gleich wahrscheinlich genommen werden, sey M , so ist $\frac{M}{2^m} = \frac{0,8}{m^{\frac{1}{2}}}$ (§. 32.) die *Wahrscheinlichkeit*, daß weder etwas gewonnen, noch verloren werde, oder daß die Summe aller Zahlungen der Casse gerade so groß sey, als sie an Mittelwerthen eingenommen hat, nämlich $\frac{1}{2} m$. A B = m . A M.

Ferner die *Wahrscheinlichkeit* daß entweder Ausgabe und Einnahme gerade gegen einander aufgehen oder doch gewonnen werde,

ist $= \frac{\frac{1}{2} \cdot (2^m + M)}{2^m} = \frac{0,8}{2 m^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}$. Denn es ist klar, daß die Summe der Fälle, in denen gewonnen wird,

wird, es sey viel oder wenig, und derer, in denen es aufgeht, so groß sey, als die Summe aller Coëfficienten vom Anfang an, bis an den Mittlern und diesen letztern dazu gerechnet.

Eben so groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es *entweder ganz aufgehen oder verloren werde.*

Nimmt man von den Coëfficienten die erstern bis auf den mittlern, diesen eingeschlossen, das ist, die Summe $\frac{2^m + M}{2}$, und dazu noch die auf M folgende nächsten n , deren Summe $= S$ sey, so ist das Verhältniß $\frac{2^m + M}{2} + S : 2^m$ die Wahrscheinlichkeit, daß *entweder gewonnen oder doch der Verlust nicht größer als n mal $A B$ seyn werde.*

Und wenn die Summe der übrigen Coëfficienten, die auf jene folgen, T heist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß *noch mehr als n . $A B$ verloren werde*, $= \frac{T}{2^m}$.

Daher die Wahrscheinlichkeit, daß *der wirkliche Verlust nicht über n . $A B$, das ist, über die größte Erwartung hinausgehen werde*, zu der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils, wie $\frac{2^m + M}{2} + S$ zu T .

2.

Es läßt sich von diesem Verhältniß eine Grenze angeben, unter der es nicht seyn kann, auf folgende Art.

Die

Die auf M folgende n Glieder in der Coëfficienten-Reihe, deren Summe S ist, heißen N, O, u. f. f., und sey $\frac{1}{2} m = q$, so ist nach den bekannten Gesetzen

$$\text{des Binomiü } N = \frac{q}{q+1} \cdot M,$$

$$O = \frac{q-1}{q+2} \cdot N = M \left(\frac{q}{q+1} \cdot \frac{q-1}{q+2} \right)$$

und wenn P das letzte von den n Gliedern ist, die auf M

$$\text{folgen, so ist } P = \left(\frac{q}{q+1} \cdot \frac{q-1}{q+2} \cdots \frac{q-n+1}{q+n} \right) M.$$

Nun ist $\frac{q}{q+1} > \frac{q-1}{q+2}$, und ferner sind die folgenden Verhältnisse, worinn die Glieder abnehmen, immer kleiner. Das letzte $\frac{q-n+1}{q+n} = h$ ist das kleinste von ihnen.

Daraus ist klar, daß wenn statt S, oder der Summe der Glieder von M bis P, beyde diese eingeschlossen, die Summe einer geometrischen Reihe von eben so vielen Theilen, nämlich $n+1$, gesucht wird, wo das erste Glied der Reihe M, und das letzte $M \cdot h^n$ ist, so bekommt man eine Summe $M + S'$, die kleiner ist als $M + S$, weil S' kleiner als S ist. Es ist aber jene Summe

$$M + S' = M \cdot \left(\frac{1-h^{n+1}}{1-h} \right).$$

Unter den folgenden Coëfficienten von dem $(n+1)$ ten nach dem mittlern an, diesen mit gerechnet, deren Anzahl $= q - n$, und deren Summe T ist, sey der

II. Theil.

T

erste

erste Q , der nächstfolgende R , so ist $R = \frac{q-n-1}{q+n+2} \cdot Q$.

Und die Verhältnisse, in denen jeder folgende in Hinsicht auf den nächst vorhergehenden steht, werden immer kleiner, das ist, die folgenden Coëfficienten nehmen in einem immer größern Verhältniß ab. Es ist also klar, daß wenn man eine geometrische Reihe berechnet, deren

erstes Glied Q , und der Exponent $= \frac{q-n-1}{q+n+2} = t$ ist, welche $q-n = k$ Glieder habe, so bekommt man eine Summe, die sicher größer ist, als die Summe des Coëfficienten Q , und der auf Q folgenden. Die Summe jener geometrischen Reihe ist $= Q \left(\frac{1-t^k}{1-t} \right)$ und diese ist größer als T .

Weil $Q = M \left(\frac{q}{q+1} \cdot \frac{q-1}{q+2} \cdot \dots \cdot \frac{q-n}{q+n+1} \right)$ so ist Q sicher kleiner als $M \cdot \left(\frac{q}{q+1} \right)^n \cdot h$. Dafür schreibe man der Kürze wegen $p^n \cdot h M$. Demnach ist auch $M \cdot p^n \cdot h \left(\frac{1-t^k}{1-t} \right) = T'$ größer als T .

Daraus folgt, daß $\frac{2^m + M + 2S}{2T} > \frac{2^m + M + 2S'}{2T'}$.

Dieses letztere Verhältniß als richtig angenommen, so ist das *Verhältniß der Wahrscheinlichkeit, daß der wirkliche Verlust nicht über n AB gehen werde*, zu der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils, daß er nämlich noch größer

größer ausfalle, größer, als

$$\frac{2^m + M}{2} + S' : T' = \frac{2^m - M}{2} + M + S' : T'$$

$$= \frac{2^m - M}{2} + M \left(\frac{1 - h^{n+1}}{1 - h} \right) : M \cdot p^n \cdot h \cdot \left(\frac{1 - t^k}{1 - t} \right)$$

und weil $2^m = \frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot M}{0,8}$ (§. 32.), so bekommt man das Verhältnifs

$$\left(m^{\frac{1}{2}} + 1,6 \cdot \left(\frac{1 - h^{n+1}}{1 - h} \right) - 0,8 \right) : 1,6 \cdot p^n \cdot h \cdot \left(\frac{1 - t^k}{1 - t} \right),$$

oder weil 0,8 in dem Zähler unerheblich ist,

$$\frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot \overline{1 - h} + 1,6 \cdot (1 - h^{n+1})}{1,6 \cdot p^n \cdot h \cdot (1 - t^k) \cdot (1 - h) : 1 - t}.$$

Dieses Verhältnifs wird durch die gegebene Zahlen m und n bestimmt.

Die beyden Gröfsen h und t sind sehr wenig verschieden, wofern nicht n dem $\frac{1}{2}m$ ganz nahe kommt und dann n selbst nicht gar groß ist. Sonst kann man immer $h = t$ setzen. Dies giebt denn kürzer den Ausdruck

$$\frac{m^{\frac{1}{2}} (1 - h) + 1,6 (1 - h^{n+1})}{1,6 \cdot p^n \cdot h (1 - h^k)} \dots$$

3.

Wenn $h = \frac{q - n + 1}{q + n}$, ein Bruch ist, der nicht zu nahe der Einheit kommt, das ist, wenn n ein erhebliches Verhältnifs zu q , oder $\frac{1}{2}m$ hat, und auch m eine ziemlich große Zahl ist, so kann sowohl h^{n+1} als h^k

T 2

als

als nichts angesehen werden. Da hat man dann noch kürzer das Verhältniß $\frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot \overline{1-h}}{1,6 \cdot p^n \cdot h}$. Hier kommt nämlich auch im Zähler der Theil 1,6 nicht in Betracht.

Da $p = \frac{q}{q+1}$ oder wenn $q+1=r, = \frac{r-1}{r}$ ist, so ist $p^n = \left(\frac{r-1}{r}\right)^n$, welches, wenn r eine große Zahl ist, als $= e^{-\frac{n}{r}}$, oder als die zum negativen natürlichen Logarithmus $\left(-\frac{n}{r}\right)$ gehörige Zahl angesehen werden kann. Diese Zahl wird aufs höchste, weil n nicht größer als $\frac{1}{2} m = q$ seyn kann, $\frac{1}{e} = \frac{1}{2,718}$.

Wenn das Verhältniß von n zu m noch dasselbe bleibt, und also auch h nicht merklich sich ändert, obgleich die Zahl m verschieden ist in verschiedenen Fällen, so wird jenes *Verhältniß der Wahrscheinlichkeit, daß der wirkliche Verlust innerhalb der größten Erwartung bleibe, zu der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils* in solchen verschiedenen Fällen, wie $m^{\frac{1}{2}} : 1$ seyn, das ist, wird *in gleichem Verhältniß sich ändern, wie das größte Risiko des Verlustes.*

Ist $n = \frac{1}{4} m = \frac{1}{2} q$, so wird $h = \frac{q - \frac{1}{2} q}{q + \frac{1}{2} q} = \frac{1}{3}$. Also $1-h = \frac{2}{3}$, und das Verhältniß ist sehr nahe $\frac{2}{3} m^{\frac{1}{2}} : \frac{1}{3} \cdot 1,6 = 2 \cdot m^{\frac{1}{2}} : 1,6$.

4. Allein

4.

Allein wenn n in Vergleichung mit m eine so kleine Zahl ist, daß h der Einheit sehr nahe kommt, so muß in dem obigen Ausdruck des Verhältnisses oder vielmehr

des Exponenten desselben $\frac{m^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-h} + 1,6(1-h^{n+1})}{1,6 \cdot p^n \cdot h \cdot (1-h^k)}$

der Factor $1-h^{n+1}$ nicht für $=1$ noch für $=0$ angenommen werden.

Dies kommt vor in der Aufgabe, die hier die interessanteste ist, nämlich *wie viel es wahrscheinlicher sey, daß entweder gewonnen werde, oder doch der wirkliche Verlust der Casse innerhalb des berechneten grössten Risico stehen bleibe, zu der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils?*

In diesem Fall ist $n = 0,2 \cdot m^{\frac{1}{2}}$.

$$\text{Also } h = \frac{q - n + 1}{q + n} = \frac{\frac{1}{2}m - n + 1}{\frac{1}{2}m + n} = \frac{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}} - 0,2}{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}} + 0,2} \text{ weil}$$

$\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}$ im Zähler unerheblich ist, wenn m eine große Zahl ist. Aber alsdenn kommt auch h der Einheit sehr nahe.

Bey diesen Voraussetzungen bekommt man

$$1-h = \frac{0,4}{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}} + 0,2} \cdot \text{Folglich wird } m^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-h} = 0,8$$

ganz nahe.

Ferner wenn für $\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}} + 0,2$ geschrieben wird r ,
 so wird $h = \frac{r - 0,4}{r}$, und $\left(\frac{r - 0,4}{r}\right)^{n+1} = e^{-\frac{0,4(n+1)}{r}}$,
 weil nämlich r oder $\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}}$ eine so große Zahl ist, daß
 $\frac{0,4}{r}$ als unerheblich in Vergleichung mit der Einheit
 weggelassen werden kann. Das giebt denn

$$h^{n+1} = e^{-\frac{0,4(m^{\frac{1}{2}} + 1)}{\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}} + 0,2}} = e^{-0,8} \text{ ganz nahe.}$$

$$\text{Folglich } 1 - h^{n+1} = 1 - \frac{1}{e^{0,8}} = \frac{e^{0,8} - 1}{e^{0,8}} \\ = \frac{1,225541}{2,22541}, \text{ das ist nahe } \frac{1}{2}. \text{ Daraus wird}$$

$$1,6 (1 - h^{n+1}) = 0,8; \text{ und also der ganze Zähler} \\ m^{\frac{1}{2}} \cdot \overline{1 - h} + 1,6 \cdot \overline{1 - h^{n+1}} = 0,8 + 0,8 = 1,6.$$

Im Nenner ist $p^n = \left(\frac{\frac{1}{2} m}{\frac{1}{2} m + 1}\right)^{m^{\frac{1}{2}}} = e^{-2 : m^{\frac{1}{2}}}$
 oder die Zahl, der der negative Logarithmus naturalis
 $\frac{2}{m^{\frac{1}{2}}}$ zugehört. Weil aber $\frac{2}{m^{\frac{1}{2}}}$ ein sehr kleiner
 Bruch ist, so wird p^n so wenig von der Einheit abwei-
 chen, daß man $p^n = 1$ setzen kann.

$$\text{Die Zahl } h^k = \left(\frac{r - 0,4}{r}\right)^k \text{ ist } = e^{-0,4 \cdot k : r}.$$

$$\text{Aber } \frac{k}{r} = \frac{\frac{1}{2} m - m^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}} + 0,2} = m^{\frac{1}{2}} \text{ ganz nahe; also}$$

 h^k

$h^k = e^{-0,4 \cdot m^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e^{0,4 \cdot m^{\frac{1}{2}}}}$, was für $= 0$ anzu-
sehen ist.

Es wird also in diesem Fall der Nenner des Verhältnisses $1,6 \cdot p^n \cdot (1 - h^k) = 1,6$; und das Verhältniss selbst $1,6 : 1,6$, das ist Gleichheit.

Es ist dies nur eine Grenze, bis so klein aber das Verhältniss der beyden Wahrscheinlichkeiten nicht werden kann; allein man sieht doch, dass es der Gleichheit sich nähert. Das heisst mit andern Worten, *je grösser die Zahl der Renten m ist, desto kleiner wird die Wahrscheinlichkeit, dass der wirkliche Erfolg über die grösste Erwartung nicht hinaus gehe, in Vergleichung mit dem entgegengesetzten Fall, dass dies geschehe.* Jene ist aber doch allemal grösser, wie sowohl aus dem obigen Ausdruck des Verhältnisses als aus der Natur der Sache unmittelbar einleuchtet.

In diesen Fällen, wo n in Vergleichung mit m eine kleine Zahl ist, kommt zwar noch in Betracht, dass die Summe der Coëfficienten von dem $(n+1)$ ten nach dem Mittelgliede an bis zu Ende, deren Anzahl $\frac{1}{2} m - n$ ist, und welche die möglichen Fälle angiebt, in denen der Verlust über das grösste Risiko hinausgeht, viel zu gross herauskomme, wenn sie auf die obige Art, nämlich als die Summe einer geometrischen Reihe, deren Exponent $t^{\text{oder } h}$ ist, berechnet wird. Die erstern hieher
gehöri-

gehörigen Coëfficienten nehmen nur ab in einem Verhältniß, das nahe so groß ist als h . Man kann fortgehen bis zum $(2n+1)$ ten nach dem mittlern; wo das Verhältniß des nächstfolgenden zu dem nächstvorhergehenden noch nicht größer als

$$\frac{q-2n-1}{q+2n+1} = \frac{\frac{1}{2}m - 2m^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{2}m + 2m^{\frac{1}{2}} + 1} = \frac{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}} - 2}{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}} + 2 + 1},$$

das ist noch unmerklich kleiner als $h = \frac{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}} - 0,2}{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}} + 0,2}$ ist.

Hingegen nehmen die folgenden Coëfficienten, deren Anzahl die größte ist, nämlich

$$\frac{1}{2}m - 2n = \frac{1}{2}m - 2m^{\frac{1}{2}}$$

immer stärker ab, so daß bey den beyden letzten das

Verhältniß $\frac{1}{m}$ wird. Aber dieß ändert doch das

Grenzverhältniß nicht merklich. Denn wenn man auch, um die Grenze noch näher zu ziehen, die Reihe der letzten Coëfficienten von dem $(n+1)$ ten nach dem mittlern an, in zwey Stücke theilen will, davon die ersten n Glieder zu dem einen, die übrigen, an der Zahl $\frac{1}{2}m - 2n$, zu dem zweyten gebracht werden, so kommt noch nahe dasselbe Resultat heraus. Die

Summe des ersten Theils ist alsdenn $M. p^n h \left(\frac{1-h^{n+1}}{1-h} \right)$,

und des zweyten $M. p^n. h^{n+2} \cdot \left(\frac{1-v^{q-2n}}{1-v} \right)$. Und

nun mag v so klein wie man will, so gar $\equiv 0$
angenom-

angenommen werden, so ist doch dieser letztere Theil wenigstens $= M p^n \cdot h^{n+2}$. Also beyde zusammen,

$M \cdot p^n \cdot h \cdot \left(\frac{1-h^{n+1}}{1-h} + h^{n+1} \right)$. Der Exponent des Verhältnisses wird folglich

$$\frac{m^{\frac{1}{2}} + 1,6 \cdot \left(\frac{1-h^{n+1}}{1-h} \right) - 0,8}{1,6 \cdot p^n \cdot h \cdot \left(\frac{1-h^{n+1}}{1-h} + h^{n+1} \right)}, \text{ oder}$$

$$\frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot \overline{1-h} + 1,6 (1-h^{n+1})}{1,6 \cdot p^n \cdot h (1-h^{n+2})}, \text{ welches wiederum sehr}$$

$$\text{nahe } \frac{0,8+0,8}{1,6 \cdot \frac{1}{2}} = 2:1 \text{ ist.}$$

Bey dieser Art zu rechnen sind aber die letzten Coëfficienten, die auf den $(2n+1)$ ten nach dem mittlern folgen, ganz weggeworfen, weil man $v=0$ genommen hat.

Dies gibt eine *zweite Grenze*, für den Fall nämlich, wo m eine so große Zahl ist, daß auch noch $m^{\frac{1}{2}}$ groß ist. Es ist die *Wahrscheinlichkeit, daß der wirkliche Verlust das Risiko nicht übersteigen werde, kleiner als die Wahrscheinlichkeit des Gegentheils*, zweymal genommen.

Es sey $m=576$. So ist $m^{\frac{1}{2}}=24$, und $n=0,4$. $m^{\frac{1}{2}}=9,6$. Dann wird, (genau gerechnet was mittelst der Logarithmen leicht ist) $h=0,938$ und $h^{n+1}=0,5074$. Aber h^k ist ganz unbedeutend.

Dies giebt den Exponenten des Verhältnisses

$$\frac{m^{\frac{1}{2}}(1-h) + 1,6(1-h^{n+1})}{1,6 \cdot p^n \cdot h} = 1,55.$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß der wirkliche Verlust innerhalb den Grenzen des Risico bleiben werde, zur Wahrscheinlichkeit des Gegentheils grösser als $1\frac{1}{2} : 1. = 3 : 2.$

Es ist auch für sich klar, unter den angenommenen Voraussetzungen, daß die Wahrscheinlichkeit *nicht mehr zu gewinnen*, als die grösste Erwartung geht, zu der Wahrscheinlichkeit *mehr zu gewinnen*, in demselben Verhältnisse sey, nämlich grösser als 3 : 2.

Ist m eine mässig grosse Zahl als 25, $m^{\frac{1}{2}}$ also 5, und $n = 0,2$, $5 = 1$, so bekommt man $h = 0,92$, und t , welches in diesem Fall nicht für gleich gross mit h genommen werden darf, $= 0,68$; auch $p = 0,92$, so gross in diesem Fall wie h , und $h^{n+1} = h^2 = 0,8464$.

Aber $t^k = \left(\frac{21}{31}\right)^{11\frac{1}{2}}$ ganz unerheblich, und $1 - t^k = 1$.

Nun die Rechnung nach dem obigen Ausdruck des Ver-

hältnisses
$$\frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot \overline{1-h} + 1,6 \cdot (1-h^{n+1})}{1,6 \cdot p^n \cdot h \cdot (1-t^k) \cdot (1-h) : 1-t}.$$

gemacht, so erhält man $\frac{2,58}{1,354}$ das ist nahe 2 : 1 für das Verhältniss der Wahrscheinlichkeit, daß der Verlust nicht über die grösste Erwartung gehen werde, zu der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils.

Es

Es sey im allgemeinen dieß Verhältniß $a:b$, so folgt daraus noch dieser Satz.

Die Wahrscheinlichkeit, daß entweder gewonnen oder verlohren, aber auch sowohl der Gewinn als der Verlust innerhalb den Grenzen des größten Risico stehen bleiben werde, ist zu der Wahrscheinlichkeit, daß entweder mehr gewonnen oder mehr verlohren werde, wie $a - b : 2b$.

Dieß fällt von selbst auf, wenn man erwäget, daß unter den angenommenen Voraussetzungen, die Coëfficienten des Binomii von dem ersten bis an den n ten vor dem Mittlern, die Fälle angeben, in denen der Gewinn über die größte Erwartung geht, und die Summe von diesen ist der Summe derer gleich, die auf den n ten an der andern Seite des mittlern Coëfficienten folgen. Die zwischen diesen fallende n vor und n nach dem mittlern, nebst dem mittlern selbst, enthalten die Fälle, in denen Gewinn und Verlust unter der größten Erwartung bleibet, oder doch nicht über sie hinaus gehet.

5.

Die nämliche Methode, die Wahrscheinlichkeit der größten Erwartung zu bestimmen, findet auch Statt bey der Abweichung der gefundenen Mittelgrößen in der vierten Abhandlung. Die größte zu erwartende Abweichung ist immer nicht die größte, die möglich ist; nur die größte die zu erwarten ist. Also ist auch

hier noch die Frage zurück: wie groß die Wahrscheinlichkeit dieser Erwartung sey, oder *die Wahrscheinlichkeit, dass die wirkliche Abweichung nicht weiter gehen werde, als jene größte in der Erwartung?*

Die größte zu erwartende Abweichung der mittlern GröÙe ist (§. 1. der vierten *Abhandl.*) ausgedruckt durch $\frac{0,2 \cdot a}{N^{\frac{1}{2}}}$ wo $a = 1$, die Summe der größten möglichen Abweichungen auf beyden Seiten ist, und N die Zahl der Fälle, aus denen die mittlere oder Durchschnitts-GröÙe gefunden ist. Wenn nun $\frac{0,2 \cdot a}{N^{\frac{1}{2}}} \cdot N = 0,2 \cdot a \cdot N^{\frac{1}{2}}$ für n, und N für 'm in den vorhergehenden Ausdrücken gesetzt wird, so kann hier auf eine ähnliche Art die Wahrscheinlichkeit der zu erwartenden Abweichung, wie oben in Hinsicht des Risico, bestimmt werden.

So ist die Wahrscheinlichkeit, dass die wirkliche Abweichung der Durchschnitts-GröÙe, *sie falle auf die eine oder die andere Seite der wahren*, innerhalb den Grenzen der größten zu erwartenden bleiben werde, eben so zu bestimmen, als vorher die Wahrscheinlichkeit, dass Gewinn oder Verlust nicht über die größte Erwartung gehen werde.

6.

Hat man aus einer Zahl von Fällen N eine größte zu erwartende Abweichung der mittlern GröÙe bestimmt,

stimmt, und es ist nun die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit sey, dass in einer gegebenen Anzahl von Fällen m ihre wirkliche Abweichung innerhalb den nämlichen Grenzen bleibe? so kann jene Abweichung $0,2 : N^{\frac{1}{2}}$ durch einen Bruch ausgedruckt werden, wenn a das Ganze oder die Einheit ist. Das Product aus diesem Bruch in m giebt die Grösse n in den obigen Formeln. Das übrige geschieht dann wie vorher. Z. B. wenn man annimmt, dass die mittlern Zahlen in den Sterblichkeits - Tafeln nur bis auf eine gewisse Grenze sicher sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass solche bey einer besondern Anzahl von Personen eben so genau zutreffen werden?

Verbesserungen.

- Seite 12 Zeile 11 lese man 1,348
 — — — 29 — — 25,957
 Seite 57 Zeile 20 für 0,959 setze man 0,659
 — — — 24 — 0,626 — — 0,616
 Seite 69 Zeile 1 von unten für 10^1 setze man $9\frac{1}{2}$
 — 77 — 4 für $(n' + 1)$ setze man $n(n' + 1)$
 — 88 — 1 — grösste — — größere
 — — — 8 — $\lambda \overline{ab} - (\lambda \overline{ab} + \delta) - - \lambda \overline{ab} . (\lambda \overline{ab} + \delta)$
 — 119 — 20 für $(a + tx + + bx^n)^m$ setze man
 $(a + bx + + tx^n)^m$
 — 131 — 2 für $(\alpha + \alpha y)^m$ setze man $(\alpha + \alpha y)^{tm}$ }
 — 136 — 5 für $\frac{mn+1}{1}$ — — $\frac{mn+1}{2}$
 — 175 Zeile 3 für, p gesetzt, schreibe man, p , und
 $N + 0,16 = q$ gesetzt.

S. 175 Z. 4 für $p + p \left(1 - \frac{Nm^2}{p} \right)^{\frac{1}{2}}$ setze man

$$p + p \left(1 - \frac{Nm^2}{p^2 q} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

— 184 Zeile 5 von unten, für 160 — 16

— 254 — 8 statt 8, 1967 soll stehen 8, 1969

— 260 — 15 — $\frac{B^n}{B} \cdot \frac{A}{r^n} — \frac{B^n}{B} \cdot \frac{1}{r^n}$

— 264 — 2 — *weniger als der dritte Theil, soll stehen wenig mehr als der dritte Theil*

— — — 7 statt $\frac{3}{4}$ soll stehen $\frac{2}{3}$

— 275 — 14 — $n=5$ soll stehen $n=15, m=5$

— 277 — 6 — $\lambda(a+m)(m+n)$ soll stehen
— $\lambda(a+m) \cdot (b+m+n).$

— 295 letzte Zeile statt $t=h$ soll st. t oder h .

— 296 Zeile 6 soll stehen

$$\frac{q-2n}{q+2n+1} = \frac{\frac{1}{2}m-2m^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}m+2m^{\frac{1}{2}}+1}, = \frac{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}}-2}{\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}}+2}.$$

Verbesserungen im ersten Theil.

Seite 63 Zeile 15 für $d(q^x)$ soll stehen $d(xq^x)$

Tab. I. Seite 537 neb. 25 Jahr unter 3 p. C. muß steh. 2,09377

— — — 30 — — 4 p. C. — — 3,24339

— Seite 538 — 52 — — 3 p. C. — — 58952

— — — 61 Jahr unt. 4 p. C. m. st. 10,9404125044

— — 539 — 84 — — 4 p. C. muß steh. 47481

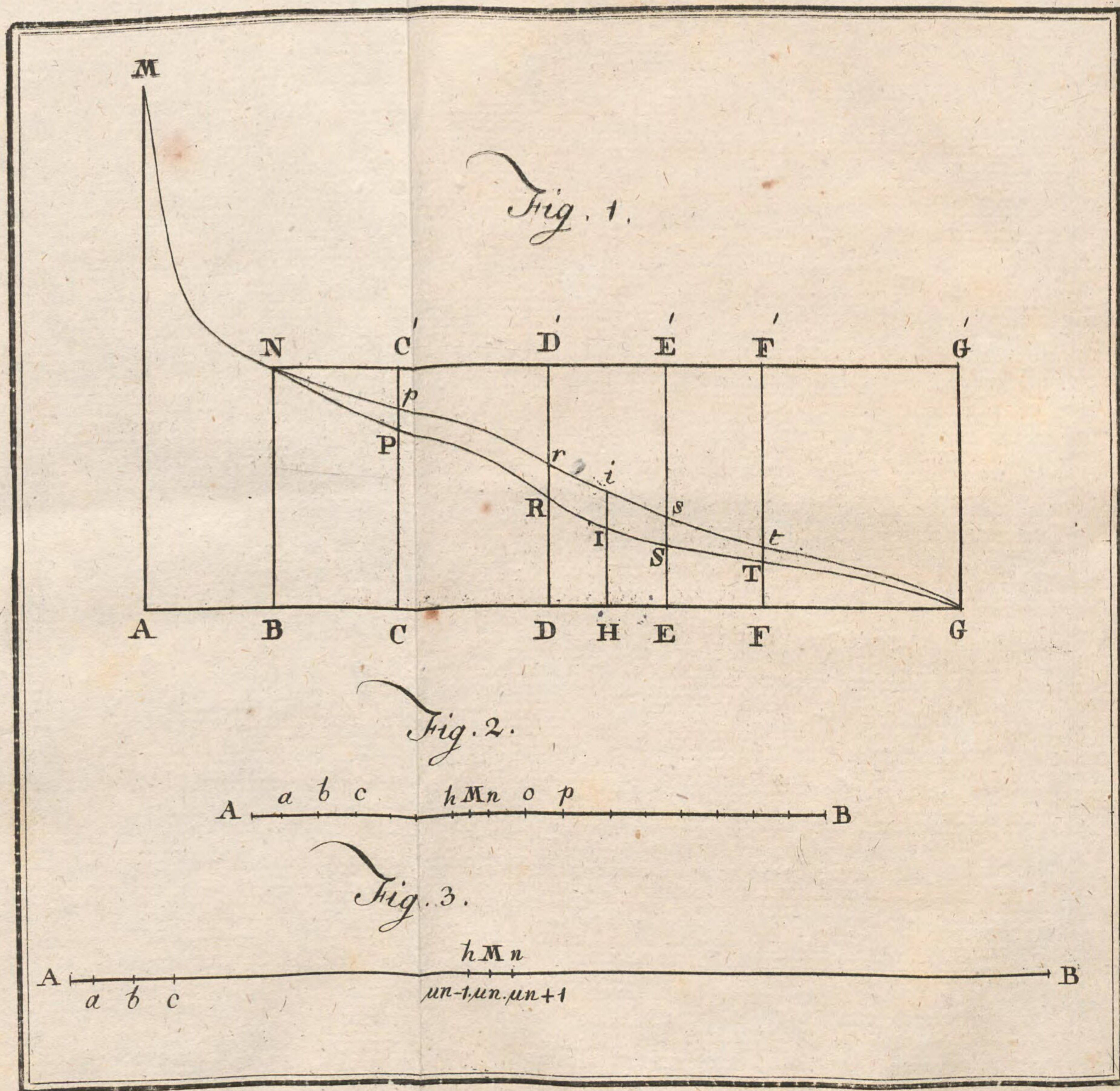
Tab. III. Seite 544 — 33 — — 3 p. C. — — 17753

— — — 38 — — 3 p. C. — — 15872

Tab. VIII. S. 554 In dieser Tafel müssen die Alterszahlen von 1 anfangen, also für 0, 1, für 1, 2 u. f. f. stehen.

Tab. XVI. S. 570 neben 16 unter 5 p. C. muß stehen 15,1457

Tab. XXV. S. 597 neben 75 muß stehen 1,0540



X 6/7339





Tetens, Johann Nicolaus, 1736-1807

Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften die vom Leben
und Tode einer oder mehrerer Personen abhängen

Bd.: 2

Leipzig 1786

Math.a. 237-2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081186-2

VD18 9004908